

ЧЁТНОСТЬ

Методические указания

Составители: Ю.В. Богомолов, И.Е. Преображенский

Чётность. Методические указания. / Сост.: Ю.В. Богомолов, И.Е. Преображенский; — Ярославль, 2013.—30 с.

Предлагаемые методические указания посвящены разбору подходов, связанных с понятием чётности, к решению математических задач. В число обсуждаемых вопросов входят обсуждение возможностей использования идей чётности и чередования при решении задач, а также варианты применения общих свойств чётных и нечётных чисел для доказательства математических утверждений. Традиционно особое внимание уделяется разбору возможных затруднительных ситуаций при изучении предлагаемой темы и способам их разрешения. Идеи и методы решения задач сопровождаются подробно разобранными примерами задач различной сложности, дополняются упражнениями и задачами для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для педагогов, осуществляющих обучение школьников 5–6 класса (программа первого года обучения) в рамках математических объединений, а также могут представлять интерес для широкого круга педагогов, занимающихся подготовкой учащихся общеобразовательной школы в системе дополнительного математического образования.

УДК 510.633
ББК 22.1

1 Введение

С понятиями чётности и нечётности дети сталкиваются достаточно рано, зачастую ещё до того, как оказываются на своём первом уроке математики. Например, кто-то заметил, что если в детском саду все строились парами и один человек остался без пары, то парами теперь уже точно не построиться, как не пытайся. Другой мог случайно обнаружить, что 13 конфет не удаётся поровну поделить между собой и своим другом, а 12 конфет — можно (и поэтому мог назвать число 12 — «честным», а число «13» — нечестным). А ещё кто-то заметил, что если прыгать по ступенькам лестницы вверх-вниз, то после пяти прыжков точно окажешься не на той ступеньке, с которой начал.

Уже в школе свойство чётности связывают с делимостью числа на 2. Делится на 2 — чётное, не делится на 2 — нечётное, всё очень легко и понятно. Да и просто разделить какое-нибудь целое число на 2 столбиком не так уж и трудно. Очень быстро школьники осваивают и признак делимости на 2 — для того, чтобы проверить, чётное перед нами число или нечётное, достаточно посмотреть на последнюю цифру, а делить для этого необязательно. Наконец, основные свойства чётных и нечётных чисел настолько очевидны, что о них обычно упоминают вскользь (в самом деле, не посвящать же целый урок тому, что сумма чётного и нечётного числа является нечётным числом).

Если задуматься о сказанном выше, то может закрасться сомнение: а зачем вообще нужна тема «Чётность»? Что там решать, что доказывать, что проверять? Неужели все задачи будут формулироваться как «выясните, чётное число или нечётное»?

На самом деле, тема «Чётность и чередование» как раз и удобна тем, что для решения практически всех предлагаемых задач потребуется в первую очередь умение логически мыслить, строить предположения, рассуждать, и лишь во вторую очередь — применять чисто математические свойства чётных чисел. Данных свойств не очень много, они очень просто формулируются, их легко запомнить, — и тем более интересно, как с помощью таких очевидных свойств можно решать весьма неочевидные задачи.

Зачастую свойства чётности при решении задач будут использоваться в достаточно широком толковании — как свойства, связанные с рассмотрением двух категорий для каких-то объектов или предметов. Это могут быть не только сами чётные и нечётные натуральные числа, но также чёрные и белые клетки шахматной доски, мальчики и девочки в классе, правдивые и ложные утверждения или даже монетки, лежащие «орлом» или «решкой», и многое другое.

В предлагаемом пособии при решении задач будут использоваться идеи чередования, различные вариации идеи разбиения на пары, рассмотрение двух множеств, двух категорий, некоторые идеи инвариантов (например, сохранение чётности количества каких-нибудь объектов при описанных в условии задачи операциях), а также другие подходы, прямо или косвенно связанные с понятием чётности. Безусловно, многие из приведенных задач вполне можно решить и без подключения перечисленных идей — любое правильное решение, предложенное школьниками, заслуживает внимания и не должно отвергаться (из-за того, что «решено, но не так» или, например, «мы сейчас решаем с помощью чередования»). В некоторых случаях можно предложить школьникам решить ту же задачу, но с другими параметрами (например, для больших чисел) или похожую задачу, чтобы исключить возможность прямого перебора.

Таким образом, основная цель — показать, как идеи чётности и чередования помогают и упрощают решение задач, а не мешают и «заставляют» искать какой-то неестественный путь решения. В итоге школьники сами будут использовать указанные подходы — потому что так смогли решить задачу, так получилось короткое решение, так легче, — иначе говоря, потому что «так захотели сами», а не «так захотел учитель». Тем не менее, если школьники не вышли сами на идею использования чётности, то будет полезно показать такой вариант решения. Причем вполне достаточно показать способ, в котором применяются свойства чётности или используются чередования, именно как один из возможных вариантов путей решения задачи, а не как единственно верный, — школьники вполне в состоянии сами убедиться в том, эффективный этот способ решения или нет (и если эффективный, то сами

захотят попробовать его в других задачах).

Отметим, что преподавателю очень важно самостоятельно прорешать предлагаемые задачи (даже те, которые снабжены разобранными решениями). Во-первых, он лучше знает учеников своего кружка, поэтому может при необходимости как уточнить условие задачи (адаптируя под уровень школьников) или предложить сначала более простой случай, так и подготовить возможные варианты указаний к решению, если дети столкнулись с затруднениями. Во-вторых, полезно почувствовать возможности применения обсуждаемых идей на различных этапах решения задачи (при этом может получиться интересный вариант решения, отличный от предложенного в пособии). В-третьих, при самостоятельной работе с задачей будет проще почувствовать, где именно у школьников могут возникнуть сложности при решении задачи. Но также отметим, что ознакомиться с предложенным разбором и комментарием будет полезно даже в том случае, если задача была с лёгкостью решена.

Помимо разобранных задач, снабженных подробными комментариями и указаниями к решению, в пособии приведены и задачи для самостоятельного решения. Их можно как использовать для составления подборки задач на дом, так и предложить на занятии.

2 Чередование и разбиение на пары.

Мы уже говорили о том, что свойства чётности или нечётности могут использоваться не в явном виде. При решении задач иногда полезной оказывается идея чередования или подход, связанный с разбиением элементов на пары. Собственно, через возможность разбить предметы на пары можно определить само понятие чётности: если удалось сделать такое разбиение на пары — предметов было чётное количество, не удалось (и не удастся ни при каких условиях) — количество предметов нечётно.

Чередование часто можно заметить в задачах, в которых проводится несколько однотипных действий — и на каждом шагу какое-нибудь свойство меняется на противоположное. Например, если целое число каждую секунду увеличивать на 1, то можно заметить, что оно каждый раз будет менять свою чётность (если в текущий момент число чётное, то через секунду станет нечётным, и наоборот). Или можно рассмотреть движение какой-нибудь фишки на привычной нам шахматной доске 8×8 , перемещающейся каждый ход на соседнюю по стороне клетку — здесь с каждым ходом будет меняться цвет клетки, на которой эта фишка располагается.

Рассмотрим несколько простых примеров, в которых удачно используется идея чередования.

Пример 1. *Голодный удав разлёгся вокруг камня и с голодухи прикусил свой хвост. В это время кролик, пользуясь беспомощностью удава, начал издеваться над ним, перепрыгивая через лежащего удава и обратно. Но через пол часа ему это надоело, и он пошёл домой, где с гордостью заявил, что ровно 357 раз перепрыгнул бедное животное. Докажите, что он заблуждается.*

▼ Легко видеть, что после первого прыжка кролик оказывается внутри кольца, образованного удавом, после второго — вне и т.д. Таким образом на нечётном прыжке он оказывается внутри, а на чётном снаружи. Число 357 — нечётное. Значит, кролик ошибся.



Пример 2. *Шахматный конь вышел с поля a1 (угол шахматной доски) и через несколько ходов вернулся в него. Докажите, что он сделал чётное число ходов.*

▼ Эта задача достаточно сложна для школьников. Идея здесь уже не так очевидна как в предыдущем примере. Зачастую школьники просто пытаются перебрать варианты и запутываются. Обратим внимание, что разумный перебор здесь осуществить невозможно, да и цели такой не ставится. Тем ни менее подобные попытки не лишены смысла, но ребёнок должен не просто механически передвигать коня по доске. Он должен весьма внимательно относиться к ситуации, пытаться заметить, что меняется, что остаётся неизменным. Важной подсказкой является то, что действие происходит на шахматной доске. Многие дети обычно игнорируют этот факт

Учитель: Обратите внимание на то, что действие происходит на шахматной доске.

Ученик: Ну и чем нам это поможет.

Учитель: А что мы знаем про шахматную доску?

Ученик: Она покрашена в два цвета.

Учитель: Прекрасно. Попробуйте использовать данное наблюдение.

Обычно через несколько минут после этого находится ученик, который замечает, что после каждого хода цвет поля на котором стоит конь меняется. Таким образом цвета чередуются. Значит, если мы стартовали с белого поля, на нечётных ходах мы будем стоять на чёрном поле, а на чётных на белом. Так как мы должны вернуться в начальную клетку, а она белая, то количество ходов будет чётным.

▲

Упражнение 1. *Может ли шахматный конь пройти с поля a1 на поле h8, побывав по дороге на каждом из остальных полей ровно по одному разу?*

Стоит отметить, что при решении задач про шахматного коня мы использовали тот факт, что шахматная доска раскрашена в два цвета, причем известным нам способом (который обычно так и называют — шахматная раскраска). В других темах мы можем столкнуться с ситуацией, когда будет удобно покрасить клетчатую

доску не в «шахматном порядке», а каким-то другим образом.

Пример 3. *Может ли прямая, не содержащая вершин замкнутой 11-звенной ломаной, пересекать все звенья.*

▼ Для начала стоит объяснить детям, что такое ломаная, нарисовать несколько примеров. Часто дети пытаются нарисовать какую-то хитрую «загогулину» и потом рассечь её прямой. Это не совсем удачная идея. Можно дать следующие подсказки. Давайте сначала нарисую прямую, а потом попытаемся «нанизать» на неё ломаную. Если эту ломаную можно нарисовать, то можно выбрать вершину с которой мы стартуем и последовательно провести все звенья. Итак пусть мы провели горизонтальную прямую и стартуем в верхней полуплоскости. Тогда проведя одно звено мы окажемся в нижней полуплоскости. Проведя второе в верхней. И так далее. Так как 11 нечётное число, то когда мы проведём последнее звено, то окажемся в нижней полуплоскости. Значит ломаная не может замкнуться.

▲

Упражнение 2. *Можно ли нарисовать замкнутую девятизвенную ломаную, каждое звено которой пересекается ровно с одним из остальных звеньев?*

Пример 4. *На хоккейном поле лежат три шайбы А, Б и С. Хоккеист бьёт по одной из них так, что она пролетает между двумя другими. Так он делает 25 раз. Могут ли после этого все шайбы остаться на исходных местах?*

▼ Чтобы решить эту задачу, ребёнок должен быть предельно внимателен. Что же меняется после удара? (В предыдущих задачах это был цвет или полуплоскость.) Оказывается, меняется ориентация треугольника, образованного шайбами. Действительно, шайбы А, Б, С могут быть расположены либо по часовой, либо против часовой стрелки. (Аккуратно рассмотрите все варианты и покажите, что это действительно так.) Дальнейшие рассуждения не сильно отличаются от предыдущих задач.

▲

Главную идею, полезную при решении следующего набора задач, следует отметить особо.

Если элементы множества можно разбить на пары, то всего элементов в множестве чётное число. Если же при таком разбиении остаётся один элемент, то в множестве нечётное число элементов.

Пример 5. Можно ли доску размером 5×5 заполнить доминошками размером 1×2 ?

▼ Достаточно проста. Предположим, что нам это удалось. Тогда каждой клетке поставим в соответствие клетку, входящую с ней в одну доминошку. Иначе говоря, все клетки доски разбиваются на пары (в пару входят две клетки, которые входят в одну доминошку). Так как 25 — число нечётное, то одна клетка останется. Значит, так разбить не получится. ▲

Рассмотрим более сложный вариант задачи, в которой разбиение на пары используется в другой форме:

Если объекты можно разбить на пары, в каждую из которых входят по одному объекту каждого из двух видов, то общее количество объектов первого вида равно количеству объектов второго вида.

Пример 6. Из шахматной доски 8×8 вырезали две противоположные клетки ($a1$ и $h8$). Можно ли оставшуюся часть доски заполнить доминошками размером 1×2 ?

▼ Здесь снова нам пригодится шахматная раскраска. Заметим, что в каждую доминошку (при любом ее расположении) входит одна белая клетка и одна черная. Таким образом, если бы доску с вырезанными клетками можно было заполнить доминошками, то все белые и черные клетки разбились бы на пары (в каждую пару входили бы клетки, образующие одну доминошку). Тогда количество белых клеток должно быть равно количеству черных. Но можно заметить, что клетки, которые мы вырезали из доски, имеют один цвет. Первоначально (до вырезания клеток) шахматная доска содержала 32 белые и 32 черные клетки (поровну), а после вырезания количество клеток одного цвета станет на 2 меньше —

то есть, белых и черных клеток теперь не поровну. Противоречие. ▲

Пример 7. Кузнечик прыгал вдоль прямой и вернулся в исходную точку (длина прыжка 1 м). Докажите, что он сделал чётное число прыжков.

▼ Заметим, что какие-то прыжки кузнечик делал вправо, а какие-то — влево. Раз все прыжки были одинаковыми (по длине), а в итоге кузнечик вернулся в исходную точку, то количество прыжков вправо равно количеству прыжков влево. Но тогда общее количество прыжков чётное (в самом деле, мы смогли разделить это количество на две одинаковые части — количество прыжков вправо и количество прыжков влево).

В символьном виде обоснование выглядит так: пусть вправо он сделал n прыжков, а мы выше доказали, что влево он сделал столько же прыжков (то есть, тоже n). Тогда всего он сделал $n + n = 2n$ прыжков, а $2n$ делится на 2.

Второй способ решения данной задачи связан с идеей чередования. Будем следить за расстоянием от начальной точки до текущего положения кузнечика. Точнее, будем только следить за тем, чётное это расстояние или нет. После первого прыжка расстояние до начальной точки будет равно 1 — это нечётное число. После второго прыжка это расстояние станет равно 2 (если он прыгнул в ту же сторону, что и первый раз) или 0 (если вернулся назад) — в любом случае расстояние до начальной точки будет чётным. Здесь на всякий случай отметим: дети не всегда понимают, что 0 — тоже чётное число, потому что кратно 2. Действительно, $0 = 2 \cdot 0$ (если удобнее, можно сказать так: при делении 0 на 2 получается частное 0 и остаток 0, то есть 0 делится на 2).

Раз перед третьим прыжком расстояние до начальной точки было чётным, а после третьего прыжка изменилось на 1, то оно стало нечётным. Тогда после четвёртого прыжка оно снова станет чётным и так далее. То есть, после чётного количества прыжков расстояние до начальной точки становится чётным, а после нечётного количества прыжков — нечётным. Так как кузнечик вернулся назад, то расстояние до уачальной точки стало равно 0 — это чётное число, поэтому сделано чётное количество прыжков. ▲

Пример 8. Можно ли склеить многогранник из 11 пятиугольников? (Пятиугольники должны быть гранями многогранника, а их стороны — его рёбрами.)

▼ Эта задача не так сложна как кажется. Тем не менее большинство детей боятся даже приступить к её решению. Предварительно стоит объяснить детям, что такое многогранник. Наглядным примером многогранника, у которого есть пятиугольные грани, является футбольный мяч. Давайте посчитаем, сколько у этого многогранника может быть рёбер. Всего у 11 пятиугольников 55 рёбер. Так как каждое ребро принадлежит сразу двум граням, то значит 55 нам нужно поделить пополам (каждое ребро мы посчитали два раза). Но 55 — нечётное число. Значит, такое невозможно. Эта идея будет нам часто встречаться в дальнейшем.

▲

Пример 9. Все костяшки домино выложили в цепь по правилам. На одном конце оказалось 5 очков. Сколько очков оказалось на другом конце?

▼ Заметим, что 5 встречается внутри чётное число раз. Действительно, к 5 мы можем пристыковать только 5, поэтому все 5 внутри указанной цепочки разбиваются на пары. Всего 5 встречается на доминошках восемь раз. Значит, если с одного конца стоит 5, то остаётся семь 5. Так как внутри чётное число, то значит и с другого конца стоит 5.

▲

Упражнение 3. Из набора домино выбросили кости с «пустышками». Можно ли оставшиеся кости выложить в ряд по правилам?

Пример 10. На доске 25×25 расставлены 25 шашек, причём их расположение симметрично относительно главной диагонали. Докажите, что одна из шашек расположена на диагонали.

▼ Заметим, что любая шашка не стоящая на главной диагонали имеет пару (симметричную ей шашку относительно диагонали). То есть, все такие шашки разбиты на пары. Отсюда следует, что вне диагонали стоит чётное число шашек. Число 25 — нечётное, поэтому на диагонали есть шашка.

▲

Упражнение 4. Допустим теперь, что расположение шашек симметрично относительно обеих главных диагоналей. Докажите, что одна из шашек стоит в центральной клетке.

Задачи

1. В народной дружке 100 человек и каждый вечер трое из них идут на дежурство. Может ли через некоторое время оказаться так, что каждый дежурил с каждым ровно один раз.

2. К 17-значному числу прибавили число, записанное теми же цифрами, но в обратном порядке. Докажите, что хотя бы одна цифра полученной суммы чётна.

3. На плоскости расположено 11 шестерёнок, соединённых в кольцо. Могут ли все шестерёнки вращаться одновременно.

4. Квадрат 9×9 разбит на единичные клетки и раскрашен в 9 цветов, причем в каждый из цветов окрашено 9 клеток и раскраска симметрична относительно одной из диагоналей. Докажите, что все клетки этой диагонали раскрашены в разные цвета.

5. На клетчатой бумаге нарисован замкнутый путь, идущий по линиям сетки. Может ли он иметь длину 2013? А длину 2014?

6. За круглым столом сидят мальчики и девочки. Докажите, что количество пар соседей разного пола чётно.

7. Три кузнечика на прямой играют в чехарду: каждую секунду один из них перепрыгивает через какого-то другого (но не через двух). Могут ли они через 111 секунд вернуться на свои места?

3 Четность и нечётность.

Для решения некоторых задач оказывается возможным просто применить некоторые простые свойства чётных и нечётных чисел. Вообще, в математике достаточно много задач, решение которых сводится к очень простому утверждению:

Сумма двух чётных чисел или сумма двух нечётных чисел является чётным числом, а сумма чётного и нечётного числа — нечётным числом.

Сразу отметим, что сначала доказательство этих фактов можно пропустить (или не выносить на обсуждение школьников).

Доказывать эти свойства можно разными способами. Если школьникам уже знаком способ записи с использованием буквенных обозначений, то можно обосновать эти утверждения следующим образом: чётное число (раз оно кратно двум) можно обозначить как $2 \cdot m$ (где m — какое-то целое число), а нечётное число (оно даёт при делении на 2 остаток 1) — как $2 \cdot m + 1$ (где m — целое число — неполное частное от деления числа на 2). Тогда сумма двух чётных чисел равна $2m + 2n = 2(m + n)$ — это кратно двум. Для разности аналогично: $2m - 2n = 2(m - n)$. Сумма двух нечётных чисел записывается так: $(2m + 1) + (2n + 1) = 2(m + n + 1)$ — кратно двум; с разностью аналогично. А для чисел разной чётности получаем: $2m + (2n + 1) = 2(m + n) + 1$ — даёт остаток 1 от деления на 2; аналогично и с разностью.

Если же чётность и нечётность дети пока понимают как возможность разбить на пары и, соответственно, невозможность такого разбиения (причём только для натуральных чисел), то можно обосновать эти правила и для такого случая. Например, докажем, что сумма двух нечётных натуральных чисел чётна. Действительно, возьмём нечётное количество каких-то предметов — первый набор — и будем образовывать из них пары (в каждую пару берём два предмета) до тех пор, пока не останется 1 «лишний» предмет (если предметов пока больше двух, то из них можно взять два и образовать пару, а если предметов не осталось, то это означает, что предметы разбились на пары, что противоречит

нечётности). Аналогично и второй набор из нечётного количества предметов можно разбить на пары, плюс тоже останется 1 «лишний» предмет. Но тогда можно взять эти два «лишних» предмета и образовать из них пару. В результате все предметы разбились на пары, поэтому их общее количество чётно. Аналогично можно обосновать и другие свойства чётности.

Обращаем внимание на то, что доказательство этих свойств лучше всего на какое-то время отложить. Конечно, иногда хочется начать с доказательства свойств «в общем виде» — из лучших побуждений (чтобы у школьников была своеобразная «теоретическая база» для решения задач). Но на данном этапе намного более важно показать, как эти свойства можно использовать в решении задач, пусть даже пока без строгого обоснования. То есть, сначала следует побольше порешать задач на использование свойств чётности, и только потом (в некотором смысле «между делом») сказать, что было бы хорошо эти свойства (раз уж их все используем в решении) строго обосновать.

А пока приступим к решению задач. Рассмотрим простой пример:

Пример 11. В городе Давилоне используются монеты достоинством 1, 3 и 5 фертингов. Должно ли с помощью 4 таких монет набрать сумму в 13 фертингов?

▼ Конечно, эту задачу можно решить и разумным перебором. Вполне возможно, что дети именно так и будут рассуждать, в этом случае вариант решения с использованием идеи чётности можно и не предлагать — в дальнейшем мы немного усложним условие, чтоб перебор не сработал.

Действительно, можно начать решение задачи с того, чтобы попробовать набрать нужную сумму. Сразу становится понятно, что без монет в 5 фертингов не обойтись (иначе не набрать больше 12 фертингов). Тогда можно взять одну монету в 5 фертингов — и после этого останется уже набрать 8 фертингов тремя монетами. Теперь уже возможен небольшой перебор: если взять ещё одну монету в 5 фертингов, то останется набрать 3 фертинга (и быстро убеждаемся, что двумя монетами этого не добиться), если же монету в 5 фертингов не брать, то точно потребуется монета в

3 фертинга (иначе тремя монетами в 1 фертинг не набрать нужной суммы) — и тогда останется набрать 5 фертингов ровно двумя монетами, что невозможно.

Любое переборное решение следует внимательно выслушивать и (при полном верном переборе) засчитывать решение как правильное. Небольшая неоптимальность решения не должна являться основанием для того, чтобы отвергать правильные рассуждения, — тем более, в дальнейшем мы немножко усложним данную задачу, чтобы перебор было трудно осуществить.

Более того, вполне возможно, что детям (естественно, после того, как они сами порешают задачу и получают свои варианты решения) можно показать переборный вариант решения — как пример разумного перебора, в котором некоторые дополнительные соображения могут сократить количество преребираемых вариантов.

Идея четности в этой задаче может упростить решение. Предположим, что мы взяли какие-то четыре монеты. Возьмём две из них. Так как каждая монета «стоит» нечётное количество фертингов, то в сумме эти две монеты дают чётное число фертингов. Две оставшиеся монеты по той же причине дают в сумме чётное количество фертингов. Тогда и все четыре монеты в сумме тоже дают чётное число фертингов (так как мы их разбили на две пары, в каждой из которых сумма чётная). Получаем, что сумма, которую мы наберём четырьмя указанными монетами, всегда является чётным числом, а 13 — число нечётное. Таким образом, 13 фертингов четырьмя монетами не набрать.



Еще раз обратим внимание на то, что в предыдущей задаче не следует форсировать применение идеи чётности. Даже описанный последний вариант решения можно пока не рассказывать. Хорошо, когда потребность в поиске каких-то новых идей для решения задач (в том числе идеи чётности) возникнет естественным путём. Решать задачу перебором вариантов достаточно естественно. Если сейчас настаивать (пусть даже не очень навязчиво) на применении идеи чётности, то в такой задаче школьники не увидят, в чём же заключается преимущество такого способа решения — он будет казаться искусственным и неудобным. А вот в ситу-

ации, когда простой переборный способ решения не приводит к полному решению за разумное время, простое и изящное решение, основанное на свойствах чётных чисел, произведёт должный эффект — идея чётности позволит решить задачу, которую другим способом «победить» не удавалось.

Пример 12. *Скупому Вовочке на День рождения подарили копилку. Каждый день Вовочка клал в эту копилку или двухрублёвую монету, или десятирублёвую. В один прекрасный день он разбил копилку и пересчитал деньги — получилось 2013 рублей. Докажите, что Вовочка ошибся (или посчитал неверно, или когда-то положил не ту монетку).*

▼ Идея использования свойств чётности в этой задаче лежит на поверхности, но дети вполне могут попытаться что-то перебрать — а так как перебор за разумное время здесь осуществить малореально, то может начаться рассмотрение частных случаев.

Ученик: Вовочка будет класть по 10 рублей. Сначала в копилке будет 10 рублей, потом 20 рублей, потом 30 рублей. В конце у него в копилке будет 2010 рублей, и если он положит еще 10 рублей, то будет уже больше, чем 2013.

Учитель: А если он будет класть не только монеты по 10 рублей?

Ученик: Если последним ходом положить не 10 рублей, а 2 рубля, то будет 2012 рублей. Тогда потом он положит какую-то монету — и все равно будет больше 2013.

Учитель: А если Вовочка до этого тоже когда-то клал 2-рублёвые монеты, то перед последним ходом может получиться не 2010, а какая-то другая сумма.

Далее всё зависит от упорства школьника и терпения учителя: либо перебор частных случаев будет какое-то время продолжаться и прекратится волевым решением учителя, либо дети на основе этих частных случаев заметят чётность текущего количества монет. Рассмотрим сейчас вариант решения с использованием свойств чётных чисел.

Можно заметить, что каждый раз Вовочка кладет в копилку чётное число рублей. Поэтому общая сумма в копилке (в рублях) — это сумма нескольких чётных чисел (каждое из которых — это

2 или 10). Тогда и общая сумма должна быть чётной, а она равна 2013.



Если до этого при решении задачи про набор нужной суммы в Давилоне идея чётности не озвучивалась, то здесь разумно вернуться еще раз к задаче про Давилон и обсудить вариант решения с использованием свойств чётных и нечётных чисел.

Немного усложним задачу про набор суммы монетами, чтобы сделать перебор крайне затруднительным. При желании эту задачу можно на кружке не давать, а предложить в качестве задачи на самостоятельное решение или приберечь для проверочной работы.

Пример 13. В городе Давилоне используются монеты достоинством 1, 3 и 5 фертингов. Должно ли с помощью 10 таких монет набрать сумму в 25 фертингов?

▼ Действительно, перебор в этой задаче уже вызывает серьезные трудности. Попробуем применить идею чётности в том же виде, в котором она использовалась в предыдущей задаче.

Предположим, мы взяли какие-то 10 монет, каждая из которых — 1, 3 или 5 фертингов. Разобьём все 10 монет на 5 пар. Заметим, что в каждой паре достоинство обеих монет выражается нечётным числом фертингов, поэтому в сумме они дают чётное число (как сумма двух нечётных). Тогда и сумма всех 10 чисел (сумма достоинств всех 10 монет) — чётное число, так как это сумма чисел в 5 парах, а в каждой паре сумма чётная. Таким образом, с помощью 10 таких монет можно набрать только чётную сумму, а нечётную (в том числе и сумму в 25 фертингов) — нельзя.

Возможен (и даже полезен) вариант решения без разбиения на пары. Найдём сумму на всех 10 монетах — это сумма каких-то 10 нечётных чисел. Сумма первых двух чисел — чётное число (так как это сумма двух нечётных чисел). Если к этой сумме прибавить достоинство третьей монеты — нечётное число — то сумма всех трёх чисел будет нечётной (к чётному числу прибавили нечётное). Прибавим четвертое число — снова получится чётная сумма (к уже имеющейся нечётной сумме прибавили нечётное число). Потом к чётной сумме прибавляем пятое число (оно нечётное)

— сумма снова становится нечётной, и так далее. Заметим, что при добавлении десятого нечётного числа у нас получится чётная сумма (а поэтому она не может быть равна 25).



Факт, который сразу вытекает из предыдущей задачи, можно сформулировать в общем виде (и обязательно обратить на него внимание детей):

*Если среди нескольких целых чисел **чётное** количество нечётных чисел, то их сумма тоже является **чётным** числом.*

*Если среди нескольких целых чисел **нечётное** количество нечётных чисел, то их сумма тоже является **нечётным** числом.*

Пример 14. Вдоль забора растут восемь кустов малины. Число ягод на соседних кустах отличается на единицу. Может ли на всех кустах быть вместе 225 ягод?

▼ Если школьники умеют решать задачи с помощью неизвестных, то вполне возможен следующий вариант рассуждения:

Ученик: На первом кусте x ягод. Тогда на втором кусте $x + 1$ ягод, на третьем — $x + 2$ ягод, ...

Учитель: Нам неизвестно, на втором кусте больше ягод, чем на первом, или меньше. Просто сказано, что отличается на 1.

Ученик: Да. Но ведь может быть больше на 1?

Учитель: Может быть и больше на 1. А может быть меньше на 1. Поэтому надо будет рассмотреть оба случая — если сейчас рассмотрим такой вариант, что на втором кусте $x + 1$ ягод, то потом надо будет разобрать и случай, когда на втором кусте $x - 1$ ягод.

Ученик: Хорошо. Итак, возьмём случай, когда на втором кусте $x + 1$ ягод. Тогда на третьем кусте $x + 2$ ягод...

Учитель: Так. Про третий куст нам тоже ничего не известно — больше там ягод или меньше.

Ученик: Пока посмотрим случай, когда больше.

Учитель: То есть, мы потом будем рассматривать каждый раз

два случая: на следующем кусте на 1 больше и на 1 меньше?

Ученик: Да.

Учитель: Но этих случаев будет очень много. Можно даже точно сказать, сколько их, — 128. Мы будем все 128 вариантов разбирать?

Число 128 должно успокоить большинство желающих проделать перебор. При этом полезно явным образом сказать, что рассмотреть только один или несколько случаев — это не является полным решением, поэтому придется или перебирать все 128 комбинаций, или искать способы, как сократить этот перебор. Если желание перебирать у кого-то из детей осталось, то лучше предложить это проделать письменно.

Даже при рассмотрении некоторого набора частных случаев у школьников может возникнуть и идея использования чётности. Действительно, при любом выборе знаков (увеличение количества ягод на 1 и уменьшение на 1) дети будут в итоге получать чётную общую сумму. Если же школьники сами не вышли на идею чётности, то можно на это натолкнуть, предложив для начала рассмотреть вариант, когда на первом кусте чётное число ягод. Рассмотрим возможный вариант рассуждения.

Учитель: Давайте посмотрим даже не на точное количество ягод на первом кусте, а просто на то, чётное оно или нечётное. Начнем с такого случая, когда на первом кусте чётное количество ягод. Тогда какое количество ягод на втором кусте?

Ученики: На втором кусте будет на 1 больше или на 1 меньше.

Учитель: А это чётное число или нечётное?

Ученики: На первом кусте чётное количество, тогда на втором нечётное.

Учитель: А почему?

Ученики: Потому что если из чётного числа вычесть 1, то будет нечётное, и если к чётному числу прибавить 1, то тоже будет нечётное.

Учитель: Хорошо. Пока у нас на первом кусте чётное количество ягод, а на втором — нечётное. На третьем кусте будет чётное количество ягод или нет?

Ученики: Чётное. На втором было нечётное, добавили или вычли 1 — получилось чётное.

Этот процесс нужно аккуратно довести до конца. Промежуточные результаты (сколько ягод на кусте — чётное или нечётное количество) лучше фиксировать, записывать на доску. В итоге следует подвести итог.

Учитель: Теперь давайте посмотрим, сколько кустов с чётным количеством ягод?

Ученики: Четыре.

Учитель: А с нечётным количеством?

Ученики: Тоже четыре.

Учитель: Тогда какой будет общая сумма — чётной или нечётной?

Ученики: Чётной, потому что четыре нечётных числа — чётное количество.

Учитель: Могло тогда в итоге получиться 225 ягод?

Ученики: Нет, это нечётное число.

Учитель: Решили задачу?

Ученики: Решили.

Учитель: Обратите внимание — мы рассмотрели только случай, когда на первом кусте чётное количество ягод. Поэтому что нужно теперь сделать?

Ученики: Разобрать случай, когда там нечётное количество.

Этот случай, конечно, разбирается аналогично (можно предложить детям самостоятельно это проделать). Есть способ рассмотреть два случая сразу, воспользовавшись идеей разбиения на пары. Действительно, разобьём кусты на такие пары: первый куст со вторым кустом, третий с четвертым, пятый с шестым, седьмой куст с восьмым. В каждой паре количество ягод на кустах отличается на 1, поэтому в паре одно число чётное, а другое нечётное. Тогда сумма чисел в каждой паре — нечётное число (как сумма двух чисел разной чётности). Итак, у нас есть 4 пары — и в каждой паре нечётная сумма. Тогда для нахождения суммы всех чисел (общего количества ягод) нужно сложить суммы в этих 4 парах — то есть 4 нечётных числа, а их сумма чётна, поэтому не может быть равна 225.



Отметим полезный факт, которым мы воспользовались в предыдущей задаче:

Среди двух соседних (отличающихся на 1) целых чисел одно чётное и одно нечётное.

В следующей задаче полезной будет идея чередования чётных и нечётных чисел.

Пример 15. По кругу расставлены несколько чисел, причём сумма любых двух соседних нечётна. Докажите, что количество чисел чётно.

▼ Если у школьников возникнут проблемы с тем, с чего начать решение этой задачи, то можно посоветовать им обратить внимание на два любых соседних числа. По условию сумма этих двух чисел является нечётным числом. Что тогда можно сказать про сами эти числа (точнее, что можно сказать об их чётности)? Очевидно, что одно из этих чисел чётно, а другое — нечётно (если бы оба были чётными или оба были нечётными, то сумма была бы чётной, а это противоречит условию).

А теперь можно оттолкнуться этих от двух соседних чисел. Итак, среди них одно нечётное число, рядом с которым стоит чётное. Какое же число стоит с другой стороны от этого чётного числа? Очевидно, что нечётное — ведь сумма с данным чётным числом должна получиться нечётной. А какое число стоит следующим по кругу (после уже рассмотренного нечётного числа)? Ответ тоже прост: чётное, так как сумма (с нечётным числом) должна быть чётной. И так далее. Легко заметить, что чётность расположенных по кругу чисел чередуется — за чётным числом стоит нечётное, а за нечётным стоит чётное. При этом этот круг замыкается. Из этого можно сделать вывод, что чётных и нечётных чисел одинаковое количество, а поэтому общее количество чисел является чётным.

Почему из такого чередования следует чётность количества чисел, следует более аккуратно обосновать. Например, можно это сделать так: покажем, что все числа можно разбить на пары (из этого сразу будет следовать, что количество чисел чётное). Возьмём любое чётное число и в пару с ним объединим соседнее нечётное число — следующее по направлению часовой стрелки.

После этого нечётного числа (под словом «после» будем подразумевать, что следующее по часовой стрелке) стоит чётное — оно объединяется в пару со следующим (по часовой стрелке) нечётным числом, и так далее. Таким образом, каждое чётное число окажется в паре со следующим по часовой стрелке числом (оно нечётное), а каждое нечётное число окажется в паре с предыдущим — то есть, против часовой стрелки — числом (оно чётное). Итак, все числа разбились на пары, и без пары ни одного числа не осталось (действительно, если вдруг осталось чётное число, то его нужно объединить в пару со следующим по часовой стрелке нечётным числом — это нечётное число пока ни с каким другим числом в пару не входит, так как нечётные числа входят в пару только с соседним чётным числом против часовой стрелки; аналогично для нечётного числа).

В описанном рассуждении мы постепенно объединяем числа в пары — при этом количество чисел, не вошедших в пару, уменьшается на 2, а так как оно конечно, то этот процесс остановится. При этом мы показали, что если есть число, пока не вошедшее ни в одну в пару, то мы можем объединить его в пару с каким-то числом (нечётное — с предыдущим чётным, а чётное — со следующим нечётным). Поэтому процесс объединения чисел в пары в данном случае остановится только тогда, когда на пары будут разбиты все числа.

▲

Пример 16. Катя и её друзья встали по кругу. Оказалось, что оба соседа каждого ребёнка — одного пола. Мальчиков среди Катиных друзей — пять. А сколько девочек?

▼ Сразу заметим, что школьники почти наверняка быстро догадаются до ответа (после того, как чётко поймут условие задачи). Попытка расставить детей по кругу указанным образом по всей видимости приведет к примеру, из которого сразу получается и ответ. Здесь необходимо пояснить школьникам, что рассмотрение одного из примеров не является решением, а факт чередования нужно ещё доказать.

Данная задача чем-то похожа на предыдущую. Можно отталкиваться от рассмотрения Кати и ее соседей. Могут ли оба соседа Кати быть девочками? В принципе, могут. Но тогда какие будут

соседи у одной из этих двух девочек? С одной стороны от этой девочки стоит Катя (девочка), поэтому и с другой стороны тоже должна быть девочка. А у этой девочки тогда какие соседи? С одной стороны стоит девочка, поэтому и с другой стороны стоит тоже девочка. И так далее — очевидно получаем, что в этом случае все дети — девочки, а это противоречит условию (должно быть 5 мальчиков).

Естественно, можно это и обобщить: если рядом с девочкой (при указанных условиях) стоят две девочки, то и все дети по кругу — девочки. И наоборот, если с мальчиком рядом стоят два мальчика, то и все дети — мальчики. А раз по условию задачи есть и мальчики, и девочки, то остается только такой случай, что рядом с каждым мальчиком стоят две девочки, а рядом с каждой девочкой — два мальчика.

Таким образом, мальчики и девочки чередуются, поэтому (как и в предыдущей задаче) их можно разбить на пары «мальчик-девочка». Поэтому количество мальчиков в круге равно количеству девочек. По условию задачи в круге 5 мальчиков, поэтому и 5 девочек. Одна из них — Катя, остальные 4 девочки — её подруги. Ответ: 4.



Пример 17. Кузнечик прыгал вдоль прямой. Первый прыжок он делает на 1 м, второй прыжок — на 2 м, третий прыжок — на 3 м, и так далее, тридцатый прыжок он делает на 30 м. Мог ли он в итоге оказаться в той же точке, с которой начал прыгать?

▼ Эта задача в более простом виде встречалась нам ранее, только там все прыжки были одинаковыми. Но те способы решения, которые оказались полезными при её решении, помогут нам и сейчас.

Первый способ: подсчёт прыжков влево и вправо. Если кузнечик в итоге вернётся назад (в исходную точку), то общая длина его прыжков вправо должна быть равна общей длине прыжков влево. Но тогда общая длина всех прыжков должна быть чётной (раз её можно разделить на две одинаковые части — прыжки влево и вправо). А общую длину прыжков мы можем найти — это сумма чисел от 1 до 30. Такую сумму можно находить самыми разными способами. Во-первых, можно просто аккуратно

её посчитать (она будет равна 465). Во-вторых, можно разбить эту сумму на пары слагаемых (1+30, 2+29, 3+28 и так далее) — получится 15 пар, сумма чисел в каждой из которых равна 31, а тогда общая сумма равна $15 \cdot 31 = 465$. Наконец, мы можем просто доказать, что она нечётная, не вычисляя её. Действительно, в сумме чисел $1+2+3+\dots+30$ поровну чётных и нечётных слагаемых. Таким образом, нечётных слагаемых ровно половина — то есть, ровно 15, а это нечётное количество. Но если в сумме нечётное количество нечётных слагаемых, то общая сумма нечётна. Итак, общая длина прыжков нечётна, а для того, чтобы кузнечик вернулся в исходную точку, она (как мы ранее доказали) она должна быть чётной. Поэтому вернуться в исходную точку он не сможет.

Второй способ: чередование чётности расстояния. Здесь будет удобно сгруппировать прыжки по два: первый и второй, третий и четвертый, пятый и шестой, и так далее (связано это с тем, что некоторые прыжки кузнечик делает на чутное расстояние, а это не меняет чётности). Будем следить за чётностью расстояния до начальной точки. Первый прыжок кузнечик сделал на 1 м (расстояние до начальной точки стало нечётным), а потом ещё на 2 метра (раз это чётное количество метров, а после первого прыжка расстояние до начальной точки было нечётным, то оно нечётным и останется). Итак, после первой пары прыжков расстояние до начальной точки нечётно. Далее кузнечик делает прыжок на 3 м — расстояние (в метрах) от начальной точки снова становится чётным (было нечётным и изменилось на нечётное число), а после прыжка на 4 метра останется нечётным (было нечётным и изменилось на нечётное число). То есть, после второй пары прыжков расстояние до начальной точки снова станет чётным. И так далее: после нечётной пары прыжков расстояние до начальной точки становится нечётным, а после чётной пары прыжков — чётным. Раз в итоге сделано 15 пар прыжков (нечётное количество), то расстояние до начальной точки стало нечётным, то есть не равно 0.



Пример 18. Петя купил общую тетрадь объёмом 96 листов и пронумеровал все её страницы по порядку числами от 1 до 192.

Вася вырвал из этой тетради 25 листов и сложил все 50 чисел, которые на них написаны. Могло ли у него получиться 2000?

▼ Отметим сразу, что в условии сказано только то, что Вася вырвал 25 листов (и не сказано, например, что он делал это с первой стреницы или вообще вырывал листы подряд). Листы могли быть вырваны в произвольном порядке. Если школьники поняли условие неверно, то на эти замечания следует тоже обратить их внимание.

Раз листы могут быть вырваны произвольно, то перебор вряд ли приведет к успеху. Воспользуемся идеями чётности и разбиения на пары (будем это проделывать со страницами). Здесь разбиение на пары возникает совершенно естественно — каждый лист состоит из двух страниц (то есть, это и есть пара страниц). При этом заметим, что номера страниц различаются на 1 (на листе расположены две последовательные страницы — одна с одной стороны и другая с другой стороны). Тогда из этих двух страниц одна имеет чётный номер, а другая — нечётный. Но сумма чётного и нечётного числа является нечётным числом, поэтому на листе сумма номеров страниц нечётна.

Чтобы найти сумму номеров страниц на всех вырванных листах, найдём эту сумму для каждого листа (она нечётна) и сложим эти суммы между собой. Было вырвано 25 листов, на каждом листе сумма номеров страниц нечётна, поэтому общая сумма номеров страниц — это сумма 25 нечётных чисел, а она нечётна, поэтому не может быть равна 2000.



Пример 19. Разность двух целых чисел умножили на их произведение. Могло ли получиться число 2013?

▼ В этой задаче можно попытаться перебрать все способы представить число 2013 в виде произведения целых чисел (не забывая про отрицательные), однако перебор получится излишне громоздким. Но даже такой перебор может натолкнуть на основную идею более короткого решения.

Предположим, что могло получиться 2013. Тогда обратим внимание на то, что при перемножении разности целых чисел на их произведение получилось нечётное число. Для дальнейшего рассуждения сформулируем в общем виде полезное свойство.

Если все множители — целые нечётные числа, то произведение нечётно. Если все множители целые, и среди них есть хотя бы одно чётное число, то произведение чётно.

Это можно сформулировать и «в другую сторону»:

Если произведение целых чисел чётно, то среди них есть хотя бы одно чётное число. Если произведение целых чисел нечётно, то все эти числа также нечётны.

Отметим, что «обратный» вариант этого свойства полезно предложить сформулировать детям. Например, можно задать такой вопрос: «Если произведение чисел — нечётное число, то что мы можем сказать про каждый множитель?» (Аналогично и для чётного произведения.) В итоге эти формулировки нужно аккуратно сформулировать самостоятельно, подводя итог обсуждению.

Вернемся к нашей задаче. Если при перемножении разности чисел на их произведение получилось нечётное число, то и разность чисел должна быть нечётной, и произведение чисел должно быть нечётным. А вот здесь мы очень быстро сталкиваемся с противоречием: если произведение двух чётных чисел нечётно, то оба этих числа тоже нечётны, но тогда их разность не может быть нечётной.

Противоречие возникло после предположения о том, что произведение может оказаться равным 2013. Значит, такой результат невозможен.



Пример 20. 98 спичек разложили в 19 коробков и на каждом написали количество спичек в этом коробке. Может ли произведение этих чисел быть нечётным числом?

▼ Раз речь идёт о нечётности произведения, то воспользуемся теми же идеями, что и в предыдущей задаче.

Предположим, что произведение записанных чисел является нечётным числом (напомним, что записанные числа — это количество спичек в коробках). Тогда все эти числа нечётны. Но тогда общее количество спичек — это сумма 19 нечётных чисел, поэтому должна быть нечётной, а тогда не равна 98. Противоречие.



Задачи

8. Не вычисляя суммы $1+2+3+\dots+2013$, определите, является она чётной или нечётной.

9. Кузнечик прыгает по прямой. За один раз он прыгает на 15 или 17 см вправо или влево. Может ли он за 20 прыжков продвинуться на 101 см от исходного положения?

10. В ряд выписаны числа от 1 до 10. Можно ли расставить между знаками «+» и «−» так, чтобы значение полученного выражения было равно 0?

11. Даны пять чисел. Сумма любых трёх из них чётна. Докажите, что все числа чётны.

12. Произведение 22 целых чисел равно 1. Докажите, что их сумма не равна 0. (Примечание для педагога: предполагается, что школьники знакомы с отрицательными числами.)

13. На доске написано 613 целых чисел. Докажите, что можно стереть одно из них так, чтобы сумма оставшихся чисел была бы чётной. Верно ли это для 612 чисел? (Примечание для педагога: предполагается, что школьники знакомы с отрицательными числами.)

14. На доске записано число 123456789. У написанного числа выбираются две соседние ненулевые цифры, из каждой из них вычитается по единице, и выбранные цифры меняются местами. Какое наименьшее число может быть получено в результате таких операций?

ОТВЕТЫ

1. Не могло. Указание: если человек идет на дежурство, то каждый раз он это делает с новой *парой* дружинников, а всего будет дежурить с 99 другими людьми. **2.** Указание: докажите, что если все цифры суммы нечётны, то в исходном числе поровну чётных и нечётных цифр (а когда мы складываем два числа в столбик, то цифры естественным образом разбиваются на пары). **3.** Указание: шестеренки делятся на два вида — вращающиеся по часовой и против часовой стрелки; соединенные шестеренки вращаются в разные стороны. **4.** Указание: рассмотрите каждый цвет в отдельности (вспомните, что у нас уже была задача про раскраску, симметричную относительно диагонали). **5.** Указание: предположим, мы прошли вдоль этого пути. Подумайте, что можно сказать про количество ходов, сделанных вправо, и количество ходов, сделанных влево (и вообще про общее количество вертикальных ходов). Предполагается, что мы изначально выбираем направления «вверх», «вправо», «влево» и «вниз». Потом подумайте, что можно сказать про количество ходов вверх и вниз (и вообще про общее количество вертикальных ходов). **6.** Указание: если подряд стоят несколько мальчиков, то можно оставить только одного из них (количество пар соседей разного пола при этом не изменится), а остальных убрать из круга, то же самое про девочек. Тогда можно решать задачу просто для случая, когда мальчики и девочки чередуются. **7.** Указание: чем-то эта ситуация напоминает задачу про шайбу на льду — посмотрите, на какие две группы можно разделить все варианты взаимного расположения кузнечиков. **8.** Сумма нечётна. **9.** Указание: точно такая же идея, как в рассмотренных задачах про кузнечика. **10.** Указание: не напоминает ли это задачу про кузнечика? Знаку «+» соответствует прыжок вправо, знаку «−» соответствует прыжок влево. **11.** Указание: сначала докажите, что среди этих чисел есть чётное. По-

том докажете, что можно найти ещё одно чётное. А после этого докажете, что среди оставшихся чисел нечётных нет. **12.** Указание: каждое число может быть равно 1 или -1 , при этом количество -1 чётное. А что нужно для того, чтобы сумма этих чисел равнялась 0? Очевидно, равное количество -1 и 1. **13.** Указание: задачу можно переформулировать — либо сумма была нечётной и тогда можно найти нечётное число (а для этого достаточно показать, что нечётных чисел нечётное количество), либо сумма была чётной и можно найти чётное число (и тогда достаточно показать, что все числа не могут быть нечётными). **14.** 101010101. Указание: чётность цифры, стоящей на каждом месте, не меняется.

Учебное издание

Чётность.

Методические указания

Составители **Богомолов Юрий Викторович**
Преображенский Игорь Евгеньевич

Компьютерный набор и верстка: Ю.В. Богомолов,
И.Е. Преображенский

Подписано в печать . . . 2013. Формат 60x84/16.

Бумага тип.

Усл. печ. л. 1,5. Уч.-изд. л. 1,5. Тираж экз. Заказ