Ярославский региональный
инновационно-образовательный центр «Новая школа»

ОСНОВЫ ТЕОРИИ ЧИСЕЛ

Методические указания

Ярославль, 2015

УДК 510.633,
ББК 22.1
Б 74

Составители: Ю.В. Богомолов, И.Е. Преображенский

Основы теории чисел. Методические указания. / Сост.: Ю.В. Богомолов, И.Е. Преображенский; — Ярославль, 2015. — 70 с.

Необходимая база для изучения теории чисел закладывается ещё в начальной школе, а к окончанию 6 класса школьники уже владеют основными свойствами делимости, знают признаки делимости, понимают отличие простых чисел от составных. В то же время ключевые понятия и идеи теории чисел даются в какой-то степени разрозненно, а в старших классах вообще чаще всего не затрагиваются (и уж тем более не углубляются). Именно по этой причине в предлагаемом пособии делается попытка собрать воедино основные идеи, методы, понятия, закономерности теории чисел, обсудить их на основе примеров и контрпримеров, задач и теорем.

Методические указания предназначены для педагогов, осуществляющих обучение школьников 5–7 класса (первый и второй год обучения) в рамках математических объединений. Идеи и методы решения задач подкрепляются подробно разобранными примерами задач из различных областей математики, дополняются упражнениями для самостоятельного решения, при этом отмечаются возможные трудности, возникающие при изучении методов решения задач.

УДК 510.633
ББК 22.1

1 Введение

С изучением натуральных и целых чисел в средней школе связан достаточно интересный парадокс. С одной стороны, уже с первого класса школьники учатся выполнять арифметические операции с натуральными числами, изучают простейшие алгоритмы (например, выполнение арифметических действий «в столбик»), сталкиваются с основными свойствами делимости. Да и в ходе решения задач школьники неявно убеждаются, что сами натуральные числа полностью соответствуют своему названию: натуральные — то есть естественные, природные, происходящие естественным путём при необходимости подсчитывать предметы (хотя вряд ли задумываются об этимологии слова «натуральные»). С другой стороны, после знакомства в 6 классе с основными свойствами делимости до окончания 11 класса к вопросу об изучении свойств целых чисел школьники не возвращаются. В результате в старших классах удивительным оказывается тот факт, что даже простые задачи по теории чисел (то есть связанные с анализом свойств тех самых естественных натуральных и целых чисел) вызывают зачастую неразрешимые трудности.

Вместе с этим изучение свойств таких простых и одновременно таких сложных объектов как целые числа является прекрасным средством изучения общих понятий и методов, формирование навыков логичского мышления, а также воспитания математической культуры. Школьники сталкиваются с новыми для себя понятиями (например, понятием простого числа), осваивают их и учатся использовать в решении математических задач. На примере обоснования свойств целых чисел осваиваются общематематические идеи, принципы и методы доказательств: метод доказательства от противного, перебор вариантов, подбор примеров и контрпримеров, а также идеи, лежащие в основе метода математический индукции. Наконец, для самых разнообразных задач целые числа являются основным «материалом» — это и стандартные учебные задания, и нестандартные математические задачи (иногда их любят снабжать прилагательным «олимпиадные»). Поэтому по возможности к изучению целых чисел и их основных свойств рекомендуется периодически возвращаться в течение всего процесса обучения в школе. Этим не только сглаживается упомянутая выше проблема с игнорированием целочисленных задач и свойств целых чисел в старших классах, но и формируется необходимая база для дальнейшего изучения ряда дисциплин в высшей школе.

С натуральными числами связан и такой трудный момент: они кажутся настолько естественными, а их свойства — настолько привычными, что при доказательстве математических утверждений сами вопросы «Почему это верно? Откуда это следует? Почему выполняется это свойство делимости?» не просто не получают корректного ответа, но и вообще не возникают. Однако важно продемонстрировать, что все свойства даже таких привычных объектов — это не результат какой-то «договорённости между математиками», а следствие из основных определений (причём такие, которые можно доказать на доступном школьникам языке). Каждое такое обоснование является дополнительным шагом к тому, чтобы показать математику не как набор условностей, искусственных правил и разрозненных фактов, а именно как красивую науку, в которой даже самые сложные факты получаются не по указанию учителя или автора учебника, а «почти из ничего» с помощью аккуратных и строгих логических переходов, обоснований, доказательств и выводов. В школе эту задачу частично решает курс геометрии на основе аксиоматического подхода (с 7 класса), однако и более младших школьников разумно знакомить с таким общематематическим подходом — и здесь теория чисел оказывается достаточно удобным средством.

Конечно, все эти строгие выводы, переходы, доказательства должны появляться постепенно и возникать естественным путём при решении математических задач. Принципиально важно отмечать, что любые используемые утверждения (свойства) должны быть доказаны, а если что-то не было доказано, то должно быть строго обосновано позже. В любом случае изучение всех свойств натуральных и целых чисел должно сопровождаться решением большого количества соответствующих задач. Задания подбираются таким образом, чтобы все их можно было решить, опираясь на доказанный к текущему моменту материал. Важно требовать от школьников аккуратно обосновывать все логические переходы, приучая к «чистоте» решения. Безусловно, даже от наиболее мотивированных школьников этого возраста (5-6 класс) обычно не приходится ожидать полных и четких доказательств. Однако важно показать школьникам, что если они не будут рассуждать достаточно строго, то могут пропустить важный пример, а это не позволит считать их решение верным. Поэтому кроме нескольких «разминочных» задач нужно иметь несколько задач с неожиданным результатом (например, с несколькими ответами).

С учётом упомянутых принципов, в пособии традиционно предлагается большое количество задач, на основе которых строится обсуждение и общих свойств делимости, а также основных понятий теории чисел. Часть из этих задач снабжена подробными решениями и вариантами рассуждений (хотя сами школьники способны предложить еще более неожиданные варианты), содержит ссылки на наиболее важные идеи доказательств.

В качестве примера на основе разобранного материала в конце каждого раздела приводятся возможные варианты комплектов задач для работы во время занятия математического объединения (кружка, факультатива), а также для самостоятельного решения дома. Эти комплекты могут быть использованы в том числе как основа для формирования подборки задач для конкретной учебной группы (в том числе для подготовки листка с заданиями для выдачи во время занятия, если используется «система листочков»). Здесь следует отметить, что не существует универсального набора задач, эффективного для изучения соответствующей темы с любой группой обучающихся. Например, младшие школьники в листке с большим количеством заданий зачастую хватаются за всё подряд и вместо последовательного изучения темы получают что-то невразумительное — им лучше предъявлять задания более мелкими «порциями». Также часто оправданным является формирование комплектов заданий повышенной сложности для наиболее сильных учащихся математического объединения или комплектов дополнительных задач для тех, кто достаточно хорошо освоил текущую тему. Для этого в каждом разделе приводится список задач, который можно использовать для дополнения или модификции комплектов заданий.

2 Делимость: основные понятия

Понятие делимости — это одно из основных понятий арифметики и теории чисел. Мы будем говорить о делимости целых чисел и в частных случаях — о делимости натуральных чисел. С младшими школьниками полезно обсудить, как именно они понимают слово «делится». Например, оказываются полезными такие вопросы:

— Верно ли, что 42 делится на 7? А на 6? А на 8?

— Как мы определили, что 42 делится на 6 и 7, но не делится на 8?

— Можно ли придумать такое целое число, что оно делится на 3, а если его умножить на 2 — то уже не делится?

— Можно ли придумать такое целое число большее 10, что оно делится на 6, а если его разделить на 2 — то уже не делится?

Помимо перечисленных, для разминки удобны такие упражнения на построение примеров целых чисел с заданными свойствами:

Упражнение 1.

а) *Найдите двузначное число (хотя бы одно), чтобы оно делилось на 4, но не делилось на 6.*

б) *Найдите двузначное число (хотя бы одно), чтобы оно делилось на 4 и на 14, но не делилось на 8.*

в) *Найдите целое число (хотя бы одно), чтобы оно делилось на 6 и на 10, но не делилось на 4.*

Упражнение 2.

а) *Найдите три целых числа, каждое из которых делится на 12.*

б) *Найдите четыре целых числа, каждое из которых делится на 2, но не делится на 4.*

в) *Найдите три целых числа, каждое из которых делится на 2 и на 3, но не делится на 12.*

Итак, дадим представление о делимости на множестве целых чисел. Целое число a делится на целое число b, которое отлично от нуля, если существует такое целое число (обозначим его k), что справедливо равенство $a = b \cdot k$. В этом случае также говорят, что b делит a. При этом целое число b называется делителем числа a, целое число a называется кратным числа b, целое число q называют частным.

Если целое число a делится на целое число b в указанном выше смысле, то можно сказать, что a делится на b нацело. Слово «нацело» в этом случае дополнительно подчеркивает, что частное от деления целого числа a на целое число b является целым числом. Школьники могут сами переспросить «делится нацело?» или «без остатка?» — лучше заранее предупредить, что в задачах на делимость целых чисел всегда будет идти речь именно про делимость нацело, без остатка.

В некоторых случаях для данных целых чисел a и b не существует такого целого числа k, при котором справедливо равенство $a = b \cdot k$. В таких случаях говорят, что целое число a не делится на целое число b (при этом имеется в виду, что a не делится на b нацело, без остатка). Однако в этих случаях прибегают к делению целых чисел с остатком.

Упражнение 3. *Можно ли подобрать такое целое число k, чтобы было верным равенство:*

а) $96 = 12 \cdot k$
б) $96 = 11 \cdot k$
в) $-528 = -6 \cdot k$
г) $-528 = 6 \cdot k$
д) $-528 = 9 \cdot k$

Можно ли сказать, что число 528 делится на 6? А делится ли оно на -6? А на 9?

На этом этапе достаточно важно показать школьникам связь между понятием делимости целого числа a на целое число b и возможностью его представления в виде $a = b \cdot k$.

Обсуждая определение делимости целых чисел, полезно напомнить и понятие чётности: целое число a называется *чётным*, если оно делится на 2. Разумно это также дополнить и более сложным определением: целое число a

называется *чётным*, если его можно представить в виде $a = 2 \cdot k$, где k — целое число.

Упражнение 4. *Подберите такое целое число k, чтобы было верным равенство:*

а) $96 = 2 \cdot k$

б) $528 = 2 \cdot k$

в) $-528 = 2 \cdot k$

Можно ли сказать, что числа 96, 528 и -528 — чётные?

2.1 Каверзный вопрос о делимости

Раз уж пошёл разговор о делимости и чётности, хотелось бы остановиться на одном каверзном вопросе. Затруднения с ответом на этот вопрос часто испытывают не только школьники, недавно закончившие начальную школу, но даже студенты, порой старших курсов. Итак, сам вопрос:

0 — *это чётное число?*

Казалось бы, ничто не предполагало проблем. Просто по определению чётности: 0 — чётное число, потому что делится на 2 (можно добавить слова «без остатка», но это подразумевается само собой). При желании можно уточнить: если 0 разделить на 2, то получится 0, а остатка нет. Также можно воспользоваться вторым определением чётности: 0 — чётное число, потому что его можно представить в виде $0 = 2 \cdot k$, где k — целое число (действительно, $0 = 2 \cdot 0$).

Тем не менее, редко при обсуждении этого вопроса удаётся сразу получить единогласный правильный ответ с корректным объяснением. На этом этапе крайне интересно выслушать и (возможно, не сразу) обсудить все предъявляемые школьниками аргументы, поскольку они способны вскрыть как полное непонимание некоторых ключевых понятий, так и просто неуверенное обращение со математическими определениями. При этом чем дольше удастся не ставить точку решительным «учитель сказал» — тем лучше. Прокомментируем здесь лишь часть реплик школьников, встретившихся при обсуждении этого каверзного вопроса.

— 0 не делится на 2, поэтому не является чётным.
— Правда? А сколько получится, если 0 разделить на 2?
— Получится 0.
— А почему тогда не делится на 2?

Это достаточно хороший случай, потому что школьник отчётливо связывает чётность с делимостью на 2, и поэтому ему нужно только помочь понять, почему же 0 на 2 вполне хорошо делится.

— На 0 вообще нельзя делить!
— Верно. Но здесь и не спрашивается, можно ли 2 разделить на 0. Вопрос был: 0 — это чётное число?

Здесь мы сталкиваемся с тем, что школьники приучились к фразе «на 0 делить нельзя» до такой степени, что наличие рядом с числом 0 производных от слова «делить» вызывает некоторую настороженность.

— Так ведь 0 ещё и на 3 делится!
— Верно. А ещё на 5. Так какое это число — чётное или нет?
— И чётное, и нечётное одновременно.
— Почему чётное и нечётное?
— Потому что на 2 и на 3 делится.
— Число 6 тоже на 2 и на 3 делится. Оно тоже чётное и нечётное сразу?
— Нет. оно чётное. Но ведь 0 можно на что угодно поделить!

— Верное. А нас пока интересует, чётное ли оно. А для этого мы должны проверить делимость на что?
— На 2. Но 0 — вообще не натуральное число.

С тем, что 0 – не натуральное число, спорить трудно. Однако раньше это нам не мешало проверять чётность отрицательного числа -528, о чём можно школьникам сразу и напомнить. А вот ситуация, когда нечётность числа «обосновывается» делимостью на нечётные числа (например, на 3 или на 5) требует исправления. Здесь намного проще дать возможность школьникам самостоятельно понять, что при проверке чётности числа нас интересует только делимость на 2. А упростить направление мыслей школьника в данное русло можно или удачно подобранным контрпримером (например, как выше было сделано с числом 6), или задачей на самостоятельный подбор контрпримера (например, «придумайте чётное число, которое делится ещё и на 5»).

— Число 0 — чётное, потому что заканчивается на 0.
— Тогда замкнутый круг какой-то получается: чтобы проверить, является ли 0 чётным числом, мы уже должны знать, чётный он или нет.

Отметим, что некоторые умудряются вышеприведённым рассуждением «доказать» и то, что 0 — нечётное число. В любом случае, следует обратить внимание школьников на то, что если нам нужно что-то доказать, то пользоваться этим мы не имеем права.

— 0 — это ни чётное, ни нечётное число.
— Почему ни чётное, ни нечётное?
— Потому что какое-то странное, на всё делится. Вот и договорились его считать и не чётным, и не нечётным.

Аргумент «ни чётное, ни нечётное» зачастую выявляет школьников, которые знакомы с определением простого числа и помнят уточнением, что 1 не является ни простым, ни составным. Это определение можно, забегая вперёд, озвучить (и убедиться, что аргумент навеян именно им), но анонсировать, что про то, почему 1 удобно не считать ни простым, ни составным, вы поговорите чуть попозже, а сейчас совершенно непонятно, зачем для числа 0 делать такое уточнение. В любом случае (в дальнейшем это потребуется при знакомстве с понятием простого числа и обсуждением определения) в разговоре об уточняющих условиях и исключениях из правил крайне осторожно следует прибегать к аргументации типа «математики так договорились» — без аккуратного объяснения, чем вызваны эти дополнительные оговорки и уточнения, у школьников будет складываться несколько превратное представление о математике как науке: мол, математика — это набор каких-то искусственных, непонятных, необъяснимых правил, по которым почему-то нужно действовать, не задавая лишних вопросов.

Наконец, попадаются и школьники, которые чётко озвучивают определение, но на чёткий вывод из него у них не хватает решимости. Некоторые могут произнести: «Чётное число — это которое делится на 2. Число 0 делится на 2...» — но сделать завершающий вывод из уже построенного силлогизма стесняются. Здесь, конечно, разумно лишний раз проговорить, что не нужно бояться делать ошибки — вопрос действительно (как выясняется) не самый простой. А даже если и простой, то простые (на первый взгляд) утверждения иногда доказываются очень непросто.

2.2 Свойства делимости

Отметим некоторые свойства делимости. Некоторые из этих свойств доказываются непосредственно из определения, а для других (даже на первый взгляд очевидных) доказательство при первом прочтении можно пропустить.

В обсуждении со школьниками такие свойства достаточно озвучить и проиллюстрировать примерами (и контрпримерами, которые бы показали, что каждое условие в свойстве является важным, а без них не работает).

Для удобства введём (или напомним) обозначение, которое и школьникам можно порекомендовать использовать для сокращения записи:

Запись $a \vdots b$ (три точки) означает, что целое число a делится (нацело) на целое число b.   *Аналогично запись $a \not\vdots b$ (зачеркнутые три точки) означает, что целое число a не делится на b.*

Теперь перейдём к основным свойствам. Доказательство некоторых свойств базируется на элементарных преобразованиях алгебраических выражений, поэтому в работе с пятиклассниками (а некоторых случаях и с шестиклассниками) строгие доказательства можно пропустить, однако в этом случае рекомендуется рассмотреть несколько примеров, но обязательно обратить внимание на то, что все эти свойства будут строго доказаны.

Свойство 1. *Если $a \vdots m$ и $b \vdots m$, то $(a+b) \vdots m$ и $(a-b) \vdots m$.*

▼ Если $a \vdots m$, то число a можно представить в таком виде: $a = mk$, где k — целое число.

Замечание: в этом пособии речь всегда будет идти о целых числах, поэтому комментарии вида «где k — целое число» в дальнейшем будем пропускать, однако при предъявлении доказательств можно это озвучивать устно.

Аналогично, так как $b \vdots m$, то $b = mt$.

Тогда $a + b = mk + mt = m(k + t)$ — то есть число $a + b$ представили как m, умноженное на целое число $k + t$. По определению это и означает, что $(a + b) \vdots m$.

Аналогично $a - b = mk - mt = m(k - t)$, то есть $(a - b) \vdots m$.

▲

Свойство 2. *Если $a \vdots m$, но $b \not\vdots m$, то $(a+b) \not\vdots m$ и $(a-b) \not\vdots m$.*

▼

Удобно доказать эти факты от противного. Докажем для суммы, а для разности ход рассуждений аналогичен.

Пусть $a \vdots m$ и $b \not\vdots m$. Докажем, что $(a+b) \not\vdots m$. Предположим противное: пусть $(a+b) \vdots m$. Тогда представим число b в виде разности: $b = (a+b) - a$. Но мы уже доказали (свойство 1), что если два числа делятся на m, то и их разность делится на m. Тогда $b \vdots m$, а по условию $b \not\vdots m$. Получили противоречие, которое и доказывает свойство.

Аналогично доказывается, что $(a-b) \not\vdots m$.

▲

Пример 1. *Известно, что $a \not\vdots m$ и $b \not\vdots m$. Всегда ли верно, что $(a+b) \not\vdots m$? А всегда ли верно, что $(a-b) \not\vdots m$?*

▼

Младшим школьникам это задание лучше сформулировать без буквенных обозначений: «Мы доказали, что если два числа делятся на какое-то число, то и их сумма тоже на него делится. А если оба числа не делятся на какое-то число, то можно ли сказать, что и сумма не делится?». В случае затруднений с восприятием условия задачу лучше разбить на две, можно с примером конкретного делителя: «Придумайте два числа, что оба они не делятся на 7, и их сумма тоже не делится на 7» и «Придумайте два числа, что оба они не делятся на 7, но их сумма делится на 7».

В обоих случаях (для суммы и для разности) однозначного ответа, делится или не делится, дать нельзя.

Для суммы: каждое из чисел 17 и 11 не делится на 7, но $17 + 11 = 28$ делится на 7. Однако если мы возьмем числа 17 и 13, то каждое из них на 7 не делится, и их сумма $17 + 13 = 30$ тоже не делится на 7. То есть, если два числа не делятся на какое-то третье, то их сумма может как делиться на это третье число, так и не делиться. Иначе говоря, из того, что $a \not\vdots m$ и $b \not\vdots m$, нельзя сделать однозначного вывода, что $(a+b) \not\vdots m$.

Аналогично подбираются примеры для разности.

▲

Свойство 3. *Если $a \vdots m$ и n — целое число, то $an \vdots m$.*

▼

Если $a \vdots m$, то число a можно представить в виде $a = mk$, где k — целое число. Тогда $an = (mk) \cdot n = m \cdot (kn)$, то есть число an представили как m, умноженное на целое число kn, поэтому an делится на m.

▲

Пример 2. *Известно, что произведение двух целых чисел a и b делится на m. Всегда ли верно, что хотя бы одно из этих чисел делится на m?*

▼

Не всегда. Например, $3 \cdot 4 = 12$ делится на 6, но ни 3, ни 4 на 6 не делятся.

▲

Свойство 4. *Если $ab \vdots m$, а числа a и m взаимно простые (не имеют общих натуральных делителей, кроме 1), то b делится на m.*

▼

Фактически, это свойство задаёт условие, при котором один из множителей гарантированно делится на число, на которое делится произведение.

В дальнейшем это свойство будет использовано в доказательстве основной теоремы арифметики — точнее, в доказательстве единственности разложения числа на простые множители.

Пока можно его использовать в решении задач без доказательства, а строгое обоснование дать позже (один из способов доказательства — через некоторые следствия из алгоритма Евклида для нахождения наибольшего общего делителя).

▲

Свойство 5. *Если $a \vdots b$ и $b \vdots c$, то $a \vdots c$.*

▼

Если $a \vdots b$, то по определению число a можно представить в таком виде: $a = bk$, где k — целое число. Если $b \vdots c$, то b можно представить в виде $b = cn$, где n — целое число. Но тогда $a = bk = cn \cdot k = c \cdot (nk)$, то есть число a представили как c, умноженное на какое-то целое число nk, поэтому a делится на c.

▲

Пример 3. *Известно, что $a \vdots b$, но $b \not\vdots c$. Всегда ли верно, что $a \not\vdots c$?*

▼

Не всегда. Например, $36 \vdots 9$, но $9 \not\vdots 2$, тем не менее $36 \vdots 2$.

▲

Пример 4. *Из утверждений «число a делится на 2», «число a делится на 4», «число a делится на 12» и «число a делится на 24» три верных, а одно неверное. Какое?*

▼

Если последнее утверждение верно, то по свойству 5 будут верными также и первые три утверждения. Поэтому последнее утверждение не может быть верным.

▲

Свойство 6. *а) Если два числа отличаются меньше чем на m и оба делятся на m, то они равны.*
б) Разница между двумя соседними числами, делящимися на m, равна m.
в) Среди m подряд идущих целых чисел ровно одно число делится на m.
г) Если подряд идёт больше m целых чисел, то среди них найдётся делящееся на m.

2.3 Элементарные задачи на делимость

Разберём несколько элементарных задач, связанных с понятием делимости и свойствами делимости чисел.

Пример 5. *Ковбой Билл зашёл в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал с него 11 долларов 80 центов (1 доллар = 100 центов), и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда бармен пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что бармен пытался его обсчитать?*

▼

Первый способ. Из условия следует, что за шесть коробков спичек бармен потребовал 11 долларов 80 центов минус 3 доллара (за бутылку) — итого 8 долларов 80 центов или просто 880 центов. Тогда один коробок спичек стоит $880 : 6$ центов, но $880 \not\vdots 6$.

Второй способ. Сколько бы ни стоили спички, общая сумма, которую должен заплатить Билл, должна делиться на 3: цена бутылки делится на 3, и цена шести коробков спичек тоже делится на 3. Бармен, однако, назвал общую сумму, которая не делится на 3. Значит, сумма была подсчитана неверно.

▲

Пример 6. *а) Найдите такие три различных числа, что их сумма делится на каждое из этих чисел. б) Найдите четыре таких числа. в) Найдите пять таких чисел. г) Найдите восемь таких чисел.*

▼

а) Например, числа 1, 2 и 3.

б) Например, числа 1, 2, 3 и 6.

в) Например, числа 1, 2, 3, 6 и 12.

г) Например, числа 1, 2, 3, 6, 12, 24, 48 и 96.

Примечание: перейдя от задачи (а) к задаче (б), а потом к задаче (в), школьники смогут обнаружить закономерность — при желании можно привести пример сколь угодно большого количества чисел, в качестве очередного числа выбирая сумму всех предыдущих (или просто удвоенное последнее число).

▲

Пример 7. *В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 200 золотых.*

▼

Заметим, что 9 и 15 делятся на 3, поэтому любая сумма, набранная такими монетами, также делится на 3. Однако 200 не делится на 3.

▲

Пример 8. *Докажите, что любое натуральное число, десятичная запись которого состоит из трёх одинаковых цифр, делится на 37.*

▼

Такое число делится на 111, а $111 \vdots 37$. Тогда по свойству 5 такое число и само делится на 37.

▲

Пример 9. *Делимое в шесть раз больше делителя, а делитель в шесть раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?*

▼

Поскольку делимое в 6 раз больше делителя, значит, частное равно 6. А так как делитель в раз больше частного, значит, он равен 36, а делимое, соответственно, равно 216.

▲

Пример 10. *В коробке лежат синие, красные и зелёные карандаши. Всего 20 штук. Синих в 6 раз больше, чем зелёных, красных меньше, чем синих. Сколько в коробке красных карандашей?*

▼

Общее число синих и зелёных карандашей делится на 7. Значит, их 7 или 14. В первом случае красных карандашей 13 — больше, чем синих. Значит, возможен только второй вариант: 6 красных карандашей.

▲

Пример 11. *а) Можно ли разложить 20 монет достоинством в 1, 2, 3, . . . , 19, 20 мунгу по трём карманам так, чтобы в каждом кармане оказалась одинаковая сумма денег? б) А если добавить еще один тугрик? (Как известно, один тугрик равен ста мунгу.)*

▼

а) Например, можно в первый карман положить монеты достоинством в 20, 19, 18 и 13 мунгу, во второй карман — 17, 16, 15, 14 и 8 мунгу, и в третий карман — 12, 11, 10, 9, 7, 6, 5, 4, 3, 2 и 1 мунгу. Таким образом, в каждом кармане окажется по 70 мунгу. б) Общее число мунгу составляет 210 + 100 = 310 мунгу, но 310 не делится на 3.

▲

Пример 12. *Пятизначное число называется неразложимым, если оно не раскладывается в произведение двух трёхзначных чисел. Какое наибольшее количество неразложимых пятизначных чисел может идти подряд?*

▼

Самое маленькое число, представимое в виде произведения двух трёхзначных чисел, это $100 \cdot 100 = 10000$. Следующее такое число: $100 \cdot 101 = 10100$, поэтому числа 10001, 10002, ..., 10099 — неразложимые. Таким образом, указано 99 идущих подряд неразложимых пятизначных чисел.

Больше, чем 99 неразложимых чисел идти подряд не может: каждое сотое пятизначное число оканчивается на два нуля, значит, его можно представить в виде произведения трёхзначного числа на 100.

▲

Пример 13. *Про семь натуральных чисел известно, что сумма любых шести из них делится на 5. Докажите, что каждое из этих чисел делится на 5.*

▼

Пусть данные числа a, b, c, d, e, f, g, а S — их сумма. Заметим, что сумма любых шести из этих чисел — это сумма всех чисел минус оставшееся число. Поэтому по условию числа $S-a$, $S-b$, $S-c$, $S-d$, $S-e$, $S-f$ и $S-g$, делятся на 5. Значит, и сумма этих чисел — а она равна $7S-(a+b+\ldots+g)=7S-S=6S$ делится на 5. Но тогда (по свойству 4 — так как 6 и 5 взаимно просты) и S делится на 5.

Итак, доказали, что сумма всех чисел делится на 5. Но тогда число $a=S-(S-a)$. А раз S и $S-a$ делятся на 5, то и их разность (число a) делится на 5. Аналогично доказывается, что на 5 делятся и оставшиеся числа — b, c, d, e, f, g.

▲

Пример 14. *На складе лежало несколько целых головок сыра. Ночью пришли крысы и съели 10 головок, причем все ели поровну. У нескольких крыс от обжорства заболели животы. Остальные 7 крыс следующей ночью доели оставшийся сыр, но каждая крыса смогла съесть вдвое меньше сыра, чем накануне. Сколько сыра было на складе первоначально?*

▼

Пусть всего было k крыс ($k>7$), тогда каждая съела в первую ночь по $10/k$ головок сыра. Во вторую ночь каждая крыса съела вдвое меньше, то есть $5/k$ головок. Все 7 крыс съели тем самым $35/k$ головок. Это целое число. Единственный делитель числа 35, превышающий 7, — само число 35. Поэтому $35/k=1$, и всего на складе до нашествия крыс было $10+1=11$ головок сыра.

▲

Пример 15. *Сумасшедший кассир меняет любые две монеты на любые три по вашему выбору, а любые три — на любые две. Сможет ли Петя обменять у него 100 монет достоинством 1 рубль на 100 монет достоинством 1 форинт, отдав ему при обмене ровно 2016 монет?*

▼

Если Петя меняет две монеты на три, то количество монет у него увеличивается на одну. Пусть он произвёл N таких обменов, тогда он отдал кассиру $2N$ монет. Чтобы сохранить общее число монет, Петя вынужден совершить столько же обменов трёх монет на две. При этом он отдаст кассиру ещё $3N$ монет. Всего он отдаст, таким образом, $2N + 3N = 5N$ монет. Но 2016 не делится на 5.

▲

Пример 16. *Известно, что выражение $14x + 13y$ делится на 11 при некоторых целых x и y. Докажите, что $19x + 9y$ также делится на 11 при таких x и y.*

▼

$19x+9y = 11(3x+2y)-(14x+13y)$. Осталось воспользоваться свойствами 1 и 3.

▲

Пример 17. *На доске записали 20 первых чисел натурального ряда. Когда одно из чисел стерли, то оказалось, что среди оставшихся чисел одно является средним арифметическим всех остальных. Найдите все числа, которые могли быть стерты.*

▼

Ответ: 1 или 20.

Первый способ. Сумма первых двадцати чисел натурального ряда равна 210 (можно установить даже простым суммированием). Следовательно, если одно из них стерто, то сумма S оставшихся чисел удовлетворяет неравенству $190 \leqslant S \leqslant 209$. Среднее арифметическое оставшихся чисел равно $S : 19$. По условию, это — натуральное число, значит, $S \vdots 19$. На отрезке $[190, 209]$ есть ровно два таких числа: 190 и 209. Если $S = 190$, то стерли число 20, а если $S = 209$, то стерли единицу.

Второй способ. (для школьников, знакомых со свойствами среднего арифметического) Заметим, что могли стереть как наибольшее из записанных чисел, так и наименьшее. Действительно, в первом случае среднее арифметическое оставшихся чисел равно $(210-20):19=10$, а во втором — $(210-1):19=11$. При стирании любого другого числа среднее арифметическое оставшихся будет больше 10, но меньше 11, то есть не целым. Таким образом, никакое другое число не могло оказаться стертым.

▲

Пример 18. *(для 7-8 класса) Докажите, что при любом натуральном n число $n^2+8n+15$ не делится на $n+4$.*

▼

$n^2+8n+15=(n+4)^2-1$. Так как $(n+4)^2$ делится на $n+4$, а 1 не делится (при натуральных n), то по свойству 2 разность не делится на $n+4$.

▲

2.4 Задания для школьников

В этом разделе предлагается комплект заданий для использования на занятии математического объединения по теме «Основы теории чисел: делимость». Задания будут разделены на группы: для решения на занятии (возможно даже для выдачи комплекта заданий школьникам) и для самостоятельного решения дома.

Делимость чисел - 1

(Для учащихся 1 года обучения в группах 5-6 классов.)

Задания для решения на занятии

1. а) Найдите двузначное число (хотя бы одно), которое делится на 4, но не делится на 6.
   б) Найдите двузначное число (хотя бы одно), которое делится на 4 и на 6, но не делится на 8.
   в) Найдите целое число (хотя бы одно), которое делится на 6 и на 10, но не делится на 4.

2. а) Найдите три целых числа, каждое из которых делится на 12.
   б) Найдите четыре целых числа, каждое из которых делится на 2, но не делится на 4.
   в) Найдите три целых числа, каждое из которых делится на 2 и на 3, но не делится на 12.

3. Можно ли подобрать такое целое число k, чтобы было верным равенство:

   а) $96 = 12 \cdot k$
   б) $96 = 11 \cdot k$
   в) $-528 = -6 \cdot k$
   г) $-528 = 6 \cdot k$
   д) $-528 = 9 \cdot k$

   Можно ли сказать, что число 528 делится на 6? А делится ли оно на -6? А на 9?

4. Подберите такое целое число k, чтобы было верным равенство:

   а) $96 = 2 \cdot k$
   б) $528 = 2 \cdot k$
   в) $-528 = 2 \cdot k$

   Можно ли сказать, что числа 96, 528 и -528 — чётные?

5. Ковбой Билл зашёл в бар и попросил у бармена бутылку виски за 3 доллара и шесть коробков непромокаемых спичек, цену которых он не знал. Бармен потребовал с него 11 долларов 80 центов (1 доллар = 100 центов), и в ответ на это Билл вытащил револьвер. Тогда бармен пересчитал стоимость покупки и исправил ошибку. Как Билл догадался, что бармен пытался его обсчитать?

6. а) Найдите такие три различных числа, что их сумма делится на каждое из этих чисел. б) Найдите четыре таких числа. в) Найдите пять таких чисел. г) Найдите восемь таких чисел.

7. В Тройном королевстве имеют хождение только монеты по 9 и по 15 золотых. Докажите, что такими монетами нельзя набрать сумму в 200 золотых.

8. Делимое в шесть раз больше делителя, а делитель в шесть раз больше частного. Чему равны делимое, делитель и частное?

Примечание. Все предложенные задачи обсуждались выше при разборе данной темы.

Домашнее задание

1. Найдите два двузначных числа, чтобы оно делилось на 6, но не делилось на 12. Попробуйте найти ещё два таких двузначных числа. Верно ли, что теперь мы нашли все такие числа?

2. На дереве росло 38 яблок. Аня, Боря и Ваня сорвали несколько яблок, причём все поровну. Докажите, что на дереве обязательно остались ещё яблоки.

3. Пирожное «Песочное» стоит 20 рублей, а пирожное «Корзиночка» — 12 рублей. Коля хочет купить несколько пирожных (но мы не знаем, каких и сколько) и отдаёт продавцу 250 рублей. Докажите, что ему обязательно должны дать сдачу.

2.5 Дополнительные задачи

Предложенные в этом разделе задачи можно использовать при формировании комплекта заданий для учащихся математических объединений 1 года обучения в группах 6-7 классов, при повторении темы «Делимость» с учащимися 2 года обучения, а также в качестве дополнительных заданий в сильных группах 1 года обучения, сформированных из школьников 5 классов и 5-6 классов.

1. Расставьте по кругу четыре единицы, три двойки и три тройки так, чтобы сумма любых трёх подряд стоящих чисел не делилась на 3.

2. Как вы думаете, среди четырёх последовательных натуральных чисел будет ли хотя бы одно делиться
а) на 2? б) на 3? в) на 4? г) на 5?

3. 109 яблок разложены по пакетам. В некоторых пакетах лежит по x яблок, в других — по 3 яблока. Найдите все возможные значения x, если всего пакетов — 20.

4. Помогите Незнайке восстановить пример на деление двух чисел, если известно, что частное в пять раз меньше делимого и в семь раз больше делителя.

5. Существуют ли два последовательных натуральных числа, сумма цифр каждого из которых делится на 7?

6. Николай с сыном и Петр с сыном были на рыбалке. Николай поймал столько же рыб, сколько и его сын, а Петр — втрое больше, чем его сын. Всего было поймано 25 рыб. Как зовут сына Петра?

7. Целое число $a+1$ делится на 3. Докажите, что $4+7a$ делится на 3.

8. У Володи было больше орехов, чем у Павлика. Если бы Володя отдал Павлику столько же орехов, сколько у того было, то у обоих мальчиков орехов стало бы поровну. Но вместо этого Володя дал Павлику совсем немного орехов (не больше пяти), а остальные поровну разделил между тремя белками. Сколько орехов Володя дал Павлику?

9. Целые числа a и b таковы, что $56a = 65b$. Докажите, что $a + b$ — составное число.

10. Найдите наибольшее четырёхзначное число, которое делится на 7 и записывается четырьмя различными цифрами.

11. Маленькие детки кушали конфетки. Каждый съел на 7 конфет меньше, чем все остальные вместе, но все же больше одной конфеты. Сколько всего конфет было съедено?

12. На блюде лежали 15 плюшек. Карлсон взял себе в три раза больше плюшек, чем Малыш, а собака Малыша Бимбо — в три раза меньше, чем Малыш. Сколько плюшек осталось на блюде?

13. В норке живёт семья из 24 мышей. Каждую ночь ровно четыре из них отправляются на склад за сыром. Может ли так получиться, что в некоторый момент времени каждая мышка побывала на складе с каждой ровно по одному разу?

14. Мальвина испекла 30 пирожков и угощает ими Пьеро, Буратино, Артемона и Арлекина. Через некоторое время оказалось, что Буратино и Пьеро съели столько же, сколько Артемон и Арлекин, а Пьеро и Артемон – в 6 раз больше, чем Буратино и Арлекин. Какое количество пирожков съел каждый, если Арлекин съел меньше всех остальных? (Все съедали пирожки целиком, и каждый съел хотя бы один пирожок.)

15. Существует ли натуральное число, кратное 2016, сумма цифр которого равна 2016?

16. $2 + a$ и $35 - b$ делятся на 11. Докажите, что $a + b$ делится на 11.

3 Деление с остатком

В предыдущем разделе мы обсудили понятие делимости. Под словом «делится» мы понимали «делится нацело», «делится без остатка» (безусловно, в дальнейшем по умолчанию предполагается именно такая трактовка). Сейчас мы подробнее обсудим, что же означает деление с остатком, и какими специфичными свойствами оно обладает. Начнем со строгого определения.

> *Будем говорить, что целое число a делится на натуральное число m с остатком r, если можно найти такое целое число k, что $a = mk+r$ (где $0 \leqslant r < m$). В этом случае числа a, m, k и r соответственно называются* делимым, делителем, неполным частным *и* остатком.

Если остаток равен 0, то слова «с остатком 0» или «без остатка» можно пропускать.

Пример 19. *Разделите число 75 на 8 с остатком. Для этого представьте число 75 в виде $75 = 8 \cdot k + r$, где $0 \leqslant r < 8$.*

▼

$75 = 8 \cdot 9 + 3$.

Таким образом, при делении 75 на 8 получаем неполное частное 9 и остаток 3.

▲

Вообще говоря, вопрос существования таких чисел k и r (неполного частного и остатка для заданного делимого a и делителя m) обычно в школьной программе обходится стороной. Докажем этот факт, а заодно и докажем, что оби не просто существуют, а определены однозначно.

Свойство 7. *Для любого заданного целого числа a и натурального числа m существуют такие целые числа k и r, что $a = mk+r$ $(0 \leqslant r < m)$, причём определены единственным возможным образом.*

▼

Докажем существование. Возьмем числовую прямую с отмеченной на ней точкой 0 (началом отсчета). Также отметим на ней число a. Начнем откладывать в обе стороны от точки 0 отрезки длины m и отмечать их концы — на прямой помимо a появятся точки $\ldots, -3m$, $-2m$, $-m$, 0, m, $2m$, $3m\ldots$. Поскольку точка a находится на каком-то конкретном расстоянии от начала отсчета, то в некоторый момент очередной отложенный отрезок длины m накроет ее — в итоге точка a либо окажется между точками mk и $m(k+1)$ (концами очередного отрезка), либо совпадет с одним из них (будем считать, что с mk). Значит можно записать следующее неравенство $mk \leqslant a < m(k+1)$. Уменьшая все части данного двойного неравенства на mk, получим $0 \leqslant a - mk < m$. Если теперь в этом неравенстве обозначим $a - mk = r$, то получим $0 \leqslant r < m$, и $a = mk + r$.

Доказательство существования можно провести и без геометрического подхода. Например, воспользуемся принципом крайнего: рассмотрим наибольшее целое число вида mk, не превосходящее a ($mk \leqslant a$). Тогда $a < m(k+1)$ (иначе число mk не было бы наибольшим, не превосходящим a, что противоречило бы выбору такого числа). Итак, нашлось такое целое k, что $mk \leqslant a < m(k+1)$. Теперь рассмотрим $r = a - mk$ и аналогично предыдущему способу убедимся, что $0 \leqslant r < m$, и $a = mk + r$.

Теперь докажем единственность. Пусть число a можно поделить на m с остатком двумя разными способами. Иначе говоря, для каких-то целых чисел верно, что $a = mk_1 + r_1$, а также $a = mk_2 + r_2$ ($0 \leqslant r_1 < m$ и $0 \leqslant r_2 < m$). тогда $mk_1 + r_1 = mk_2 + r_2$. Преобразуем: $r_1 - r_2 = m(k_2 - k_1)$. Отсюда следует, что $r_1 - r_2$ делится на m. Но так как оба числа (r_1 и r_2) неотрицательны и меньше m, то их разность лежит в таком диапазоне: $-m < r_1 - r_2 < m$. Однако в этом диапазоне только одно число делится на m — это число 0. Тогда $r_1 - r_2 = 0$ (то есть, $r_1 = r_2$). Но тогда $m(k_1 - k_2) = 0$, откуда $k_1 - k_2 = 0$ (то есть, $k_1 = k_2$). Таким образом, из того, что одновременно выполняются равенства $a = mk_1 + r_1$ и $a = mk_2 + r_2$, мы доказали, что $k_1 = k_2$ и $r_1 = r_2$ — то есть, неполные частные совпадают, и остатки тоже совпадают. Стало быть, такое представление числа a единственное.

▲

Пример 20. *Найти остаток от деления числа -23 на 7.*

▼

В большинстве случаев начинают рассуждать следующим образом: «Поскольку остаток от деления 23 на 7 равен 2, а целое частное равно 3 (это всем ясно) то в случае числа -23 получим остаток -2 а целое частное -3.» Но данный ответ неверный. Если вспомнить определение остатка, то он должен быть целым неотрицательным числом, меньшим 7, то есть может принимать значения 0, 1, 2, 3, 4, 5, 6, и равняться -2 никак не может. После данного пояснения самым распространенным является ответ: «Ну, тогда остаток будет как и в случае числа 23 — то есть 2.» Однако он тоже оказывается неверным. Начнем рассуждать исходя из определения: нам необходимо представить число -23 в виде $-23 = 7k + r$. Поскольку в этом равенстве r не может быть отрицательным, то $7k$ не может быть больше -23 и должно делиться на 7. Ближайшее не превосходящее -23 число, делящееся на 7, равно -28. Тогда $-23 = -28 + 5 = 7 \cdot (-4) + 5$, остаток от деления -23 на 7 равен 5, а неполное частное равно -4.

Ответ: 5.

▲

Пример 21. *Найдите все числа, при делении которых на 7 в частном получится то же число, что и в остатке.*

▼

Остаток при делении на 7 не может превышать 6 (при этом в данной задаче остаток ещё и не может быть равен 0, как можно легко убедиться). Таким образом, интересующие нас числа можно представить в виде $7a + a = 8a$, где $a = 1, 2, \ldots, 6$. Итак, вот эти числа: 8, 16, 24, 32, 40, 48.

▲

Пример 22. *В ряд лежат 1000 конфет. Сначала Вася съел девятую конфету слева, после чего съедал каждую седьмую конфету, двигаясь вправо. После этого Петя съел седьмую слева из оставшихся конфет, а затем съедал каждую девятую из них, также двигаясь вправо. Сколько конфет после этого осталось?*

▼

Вася начал с девятой конфеты слева, значит, из 992 конфет он съедал по одной конфете из каждых семи (первую из каждой «семерки»). Так как $992 : 7 = 141$ (остаток 5), то Вася съел 142 конфеты. После этого осталось 858 конфет. Петя начал с седьмой конфеты слева, то есть из 852 конфет он съедал по одной конфете из каждых девяти (первую из каждой «девятки»). Так как $852 : 9 = 94$ (остаток 6), то Петя съел 95 конфет. Таким образом, осталось 763 конфеты.

▲

Пример 23. *Среди невиданных зверей, оставивших следы на неведомых дорожках, было стадо одноглавых Тридцатичетырёхножек и трёхголовых Драконов. Всего в стаде 286 ног и 31 голова. Сколько лап у трёхголового Дракона?*

▼

В стаде 286 ног, это значит, что Тридцатичетырёхножек не может быть больше 8, так как $34 \cdot 9 > 286$. В стаде 31 голова, а у каждого Дракона по три головы, значит, число Тридцатичетырёхножек при делении на 3 должно давать остаток 1. Отсюда следует, что Тридцатичетырёхножек либо 1, либо 4, либо 7. Зная общее число голов, определяем число Драконов — соответственно, либо 10, либо 9, либо 8. В первом случае на 10 Драконов приходится 252 лапы, во втором — на 9 Драконов — 150 лап, и только в третьем случае на каждого Дракона приходится по целому числу лап, а именно — по 6 (48 лап на 8 Драконов). Таким образом, у каждого Дракона 6 лап.

▲

3.1 Свойства остатков

Докажем некоторые полезные свойства остатков при арифметических операциях над целыми числами.

Свойство 8. *Пусть число a даёт при делении на m остаток r_1, а число b даёт при делении на m остаток r_2. Тогда число $a+b$ даёт при делении на m такой же остаток, как r_1+r_2 (то есть при нахождении остатка от деления суммы чисел на число m можно суммировать не сами числа, а их остатки от деления на m).*

▼

По условию: $a = mk_1 + r_1$, $b = mk_2 + r_2$ ($0 \leqslant r_1 < m$ и $0 \leqslant r_2 < m$). Пусть остаток от деления суммы $r_1 + r_2$ на m равен

r (то есть, $r_1 + r_2 = mk + r$, где $0 \leqslant r < m$).

Тогда $a + b = mk_1 + r_1 + mk_2 + r_2 = m(k_1 + k_2) + r_1 + r_2 = m(k_1 + k_2) + mk + r = m(k_1 + k_2 + k) + r$ — то есть, остаток от деления $a + b$ на m равен r, но именно такой остаток от деления на m имеет и сумма $r_1 + r_2$.

▲

Аналогично доказывается и свойство для разности:

Свойство 9. *Пусть число a даёт при делении на m остаток r_1, а число b даёт при делении на m остаток r_2. Тогда число $a - b$ даёт при делении на m такой же остаток, как $r_1 - r_2$*

Верно такое же свойство и для произведения:

Свойство 10. *Пусть a даёт при делении на m остаток r_1, а число b даёт при делении на m остаток r_2. Тогда число ab даёт при делении на m такой же остаток, как $r_1 r_2$ (то есть при нахождении остатка от деления произведения чисел на число m можно перемножать не сами числа, а их остатки от деления на m).*

▼

По условию: $a = mk_1 + r_1$, $b = mk_2 + r_2$ ($0 \leqslant r_1 < m$ и $0 \leqslant r_2 < m$). Пусть остаток от деления произведения $r_1 r_2$ на m равен r (то есть, $r_1 r_2 = mk + r$, где $0 \leqslant r < m$).

Тогда $ab = (mk_1 + r_1)(mk_2 + r_2) = mk_1 \cdot mk_2 + mk_1 r_2 + mk_2 r_1 + r_1 r_2 = m(mk_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1) + mk + r = m(mk_1 k_2 + k_1 r_2 + k_2 r_1 + k) + r$ — то есть, остаток от деления ab на m равен r, но именно такой остаток от деления на m имеет и произведение $r_1 r_2$.

▲

Свойство 11. *Пусть a даёт при делении на m остаток r. Тогда число an даёт при делении на m такой же остаток, как rn.*

▼

По условию: $a = mk + r$. Пусть остаток от деления rn на m равен r_1 (то есть, $rn = mt + r_1$, где $0 \leqslant r_1 < m$).

Тогда $an = (mk + r) \cdot n = mkn + rn = mkn + mt + r_1 = m(kn + t) + r_1$ — то есть, остаток от деления an на m равен r_1, но именно такой остаток от деления на m имеет и произведение rn.

▲

Свойства 8 и 10 легко обобщаются на случай произвольного количества чисел:

Свойство 12. *Пусть числа a_1, a_2, ..., a_n дают при делении на m остатки r_1, r_2, ..., r_n соответственно. Тогда $a_1 + a_2 + \ldots + a_n$ даёт при делении на m такой же остаток, как $r_1 + r_2 + \ldots + r_n$, а число $a_1 a_2 \ldots a_n$ даёт при делении на m такой же остаток, как $r_1 r_2 \ldots r_n$ (то есть, при нахождении остатка от деления суммы или произведения произвольного количества чисел на какое-то число m можно суммировать или перемножать не сами числа, а их остатки от деления на m).*

▼

Для доказательства достаточно n раз воспользоваться свойством 8 или 10.

▲

Наконец, если воспользоваться доказанным свойством 12 для $a_1 = a_2 = \ldots = a_n = a$, то можно доказать такое свойство:

Свойство 13. *Пусть a даёт при делении на m остаток r. Тогда число a^n даёт при делении на m такой же остаток, как r^n. (то есть, при нахождении остатка от деления степени числа на какое-то число m можно возмодить в соответствующую степень не само число, а его остаток от деления на m).*

Таким образом, доказанные свойства остатков можно «свернуть» в одно правило, которым мы в дальнейшем воспользуемся при решении задач:

> *Если необходимо найти остаток от деления на m арифметического выражения, содержащего суммы, разности, произведения и натуральные степени целых чисел, то вместо самих чисел можно взять их остатки от деления на m.*

3.2 Решение задач с помощью свойств остатков

Пример 24. *Записано выражение:* $2003 \cdot 2004 \cdot 2005 + 2006^3$. *Докажите, что значение этого выражения делится на 7.*

▼

Конечно, задачу можно решить и «в лоб»: аккуратно перемножить четырёхзначные числа, возвести ещё одно четырёхзначное число в куб, сложить полученные значения, а полученную сумму поделить на 7 столбиком. Более того, школьникам можно для начала предложить и примеры, где бы они могли решить аналогичную задачу и вручную (например, найти остаток от деления на 7 числа $203 \cdot 204 + 2006$), постепенно увеличивая количество операндов и сложность прямых вычислений, подталкивая школьников таким образом к мысли о поиске каких-то обходных путей.

Как уже было сказано выше, можно заменить каждое число в этом выражении на его остаток от деления на 7. Числа 2003, 2004, 2005 и 2006 при делении на 7 дают остатки 1, 2, 3 и 4 соответственно. Поэтому исходное выражение при делении на 7 даёт такой же остаток, как и число $1 \cdot 2 \cdot 3 + 4^3 = 6 + 64 = 70$. Но число 70 делится на 7 (то есть, даёт при делении на 7 остаток 0), поэтому и значение исходного выражения даёт при делении на 7 остаток 0 (то есть делится на 7).

▲

Пример 25. *Найдите остаток от деления числа* 9^{100} *на 8.*

▼

Число 9 при делении на 8 даёт остаток 1. Поэтому 9^{100} при делении на 8 даёт такой же остаток, как и число 1^{100}, то есть 1.

▲

Пример 26. *При делении некоторого числа* m *на 13 и 15 получили одинаковые частные, но первое деление было с остатком 8, а второе без остатка. Найдите число* m.

▼

Число 13 на 2 меньше 15. Значит, при одном и том же частном n остаток от деления на 15 на $2n$ больше, чем при делении на 13, то есть $2n = 8$. Отсюда делимое m равно $15 \cdot 4 = 13 \cdot 4 + 8 = 60$.

▲

Пример 27. *Докажите, что* $2222^{5555} + 5555^{2222}$ *делится на 7.*
▼

Как и в ранее рассмотренных задачах, заменим основания степени на их остатки от деления на 7. 2222 и 5555 при делении на 7 дают остатки 3 и 4 соответственно, поэтому $2222^{5555} + 5555^{2222}$ при делении на 7 дает такой же остаток, как и $3^{5555} + 4^{2222}$. Разберёмся с каждым из слагаемых.

Будем последовательно находить остатки от деления числа 3^n на 7 (при n = 1, 2, 3, …). $3^2 = 9$ при делении на 7 дает остаток 2. Тогда $3^3 = 3^2 \cdot 3$ даёт при делении на 7 такой же остаток, как $2 \cdot 3$, – то есть 6. Теперь $3^4 = 3^3 \cdot 3$, поэтому при делении на 7 даёт такой же остаток, как $6 \cdot 3 = 18$, то есть 4. Тогда $3^5 = 3^4 \cdot 3$ при делении на 7 даёт такой же остаток, как $4 \cdot 3 = 12$, то есть 5.

Заметим, что для получения остатка очередной степени при делении на 7 достаточно умножить остаток предыдущей степени на 3 и поделить с остатком на 7, — то есть остаток каждой следующей степени однозначно получается из остатка предыдущей (скоро нам это потребуется).

Но продолжим. Итак, $3^6 = 3^5 \cdot 3$ при делении на 7 даёт такой же остаток, как $5 \cdot 3 = 15$, то есть 1. Теперь $3^7 = 3^6 \cdot 3$, поэтому при делении на 7 даёт такой же остаток, как $1 \cdot 3$, то есть 3. Далее $3^8 = 3^7 \cdot 3$, поэтому при делении на 7 даёт такой же остаток, как $3 \cdot 3 = 9$, то есть 2.

Внесём пока результаты в таблицу.

Число	3^1	3^2	3^3	3^4	3^5	3^6	3^7	3^8	3^9	…
Остаток	3	2	6	4	5	1	3	2	…	…

Отметим, что остатки стали повторяться: снова подряд появились остатки 3 и 2. Но для получения остатка от деления очередного числа вида 3^n при делении на 7 достаточно умножить остаток предыдущей степени (3^{n-1}) на 3. Поэтому после остатка 2 всегда будет идти остаток 6, а после остатка 6 — остаток 4, и так далее. Таким образом, остатки будут повторяться и дальше в той же последовательности: 3, 2, 6, 4, 5, 1, потом снова 3, 2, 6, 4, 5, 1, и так далее.

Какой же остаток будет, когда мы доберёмся до 3^{5555}? Раз остатки повторяются «шестёрками», то для этого нужно поделить 5555 на 6. Итак, $5555 = 925 \cdot 6 + 5$ (то есть остаток равен 5).

Поэтому пока мы дойдём до 3^{5555}, 925 раз повторится комбинация остатков 3, 2, 6, 4, 5, 1, а после этого нам нужно посмотреть пятое число в этой последовательности. Это число 5. Поэтому остаток от деления 3^{5555} на 7 равен 5. Но тогда остаток от деления 2222^{5555} на 7 тоже равен 5.

Абсолютно аналогично рассмотрим остатки от деления числа 4^{2222} на 7. Результаты сразу бедем заносить в таблицу:

Число	4^1	4^2	4^3	4^4	4^5	4^6	4^7	4^8	4^9	...
Остаток	4	2	1	4	2	1	4	2	...	...

Здесь можно заметить ту же повторяемость остатков, только уже не «шестёрками», а «тройками»: 4, 2, 1, потом снова 4, 2, 1, и так далее. Стало быть, для нахождения остатка от деления 4^{2222} на 7 нужно поделить 2222 на 3 с остатком: $2222 = 740 \cdot 3 + 2$ (то есть, остаток равен 2). Поэтому пока мы дойдём до 4^{2222}, 740 раз повторится комбинация остатков 4, 2, 1, а после этого нам нужно посмотреть второе число в этой последовательности остатков — это число (остаток) 2. Стало быть, остаток от деления на 7 числа 4^{2222}, а значит и числа 5555^{2222}, равен 2.

Осталось подвести итог. При делении на 7 число 2222^{5555} деёт остаток 5, а число 5555^{2222} — остаток 2. Тогда их сумма даёт при делении на 7 такой же остаток, что и $5 + 2 = 7$, то есть остаток 0. Но это и означает, что $2222^{5555} + 5555^{2222}$ делится на 7.

▲

Подобная идея с периодичностью (повторяемостью) остатков от деления чисел вида a^n при делении на заданное число m (при $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$) может быть довольно полезной при решении задач на делимость и остатки.

Пример 28. *Может ли число $2016^n + 2017^n + 2018^n$ оканчиваться на 7 при каком-нибудь натуральном n?*

▼

Так как последняя цифра числа — это остаток от деления этого числа на 10, то всё сказанное ранее про свойства остатков справедливо и по отношению к последней цифре числа. Поэтому основания степеней 2016^n, 2017^n и 2018^n вполне можно заменить на их остатки от деления на 10 (то есть на последние цифры) — 6^n, 7^n и 8^n соответственно.

Легко заметить, последняя цифра числа 6^n равна 6. Последняя цифра числа 7^n при $n = 1$ равна 7, при $n = 2$ последняя цифра 7^n равна 9 (то есть мы перемножаем два числа, заканчивающиеся на 7), при $n = 3$ последняя цифра 7^n равна 3 (умножаем число 7^2, заканчивающиеся на 9, на число 7 — результат будет оканчиваться на 3), наконец при $n = 4$ последняя цифра 7^n равна 1 (умножаем число 7^3, заканчивающиеся на 3, на число 7 — результат будет оканчиваться на 1). Далее заметим, что при $n = 5$ последняя цифра 7^n снова равна 7 (умножаем число 7^4, заканчивающиеся на 1, на число 7 — результат будет оканчиваться на 7), и так далее — последние цифры числа 7^n (и такие же последние цифры у чисел 2017^n) будут повторяться: 7, 9, 3, 1, 7, 9, 3, 1, 7, 9, ...

Абсолютно аналогично разбираются последние цифры чисел 8^n (или 2018^n): 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, 8, 4, 2, 6, 8 ...

Полученные результаты (последние цифры) удобно занести в таблицу или просто записать одни под другими:

n	1	2	3	4	5	6	7	8	9	...
Окончание 2016^n	6	6	6	6	6	6	6	6	6	...
Окончание 2017^n	7	9	3	1	7	9	3	1	7	...
Окончание 2018^n	8	4	2	6	8	4	2	6	8	...
Окончание суммы	1	9	5	9	1	9	5	9	1	...

Заметим, что последние цифры суммы также повторяются (с периодом 4), причём среди них не встречается цифры 7. Поэтому число $2016^n + 2017^n + 2018^n$ не может оканчиваться на 7 ни при каком-нибудь натуральном n.

▲

Пример 29. *Из книги вырвали 25 страниц. Может ли сумма 50 чисел, являющихся номерами (с двух сторон) этих страниц, быть равной 2721?*

▼

Рассмотрим одну из страниц. С одной стороны нее написано нечетное число $2m - 1$, а с другой — следующее за ним четное число $2m$ (посмотрите, как нумеруются страницы книги). Сумма этих двух номеров равна $4m - 1 = 4(m - 1) + 3$, то есть дает от деления на 4 остаток 3. Из приведенного рассуждения следует, что сумма 50 номеров страниц, о которых говорится в условии, дает такой же остаток от деления на 4, как и $3 \cdot 25 = 75$, то есть остаток 3. Однако 2721 дает остаток 1 от деления на 4, поэтому указанная в условии сумма не может равняться 2721.

▲

Пример 30. *Докажите, что квадрат нечетного числа дает остаток 1 при делении на 8.*

▼

Нечётное число a записывается в виде $a = 2n + 1$. Тогда $a^2 = (2n+1)^2 = 4n^2+4n+1 = 4n(n+1)+1$. Заметим, что $n(n+1)$ — чётное число (потому что из двух последовательных целых чисел одно чётное, а значит и произведение чётное), то есть $n(n+1) = 2k$. Тогда $a^2 = 4 \cdot 2k + 1 = 8k + 1$, что и требовалось доказать.

▲

3.3 Замечание об остатках

Когда мы выполняем арифметические операции с натуральными числами, то при нахождении остатка от деления на m можно заменять числа (операнды) на остатки от деления на m. При остаток от деления мы понимали в совершенно привычном смысловом значении — с ограничением $0 \leqslant r < m$.

Однако стоит заметить, что в рассмотренных ранее арифметических свойствах остатков можно заменять числа не обязательно на сами остатки от деления, а просто на числа, которые дают точно такой же остаток от деления на данное число. Например, свойство суммы можно записать в таком виде:

Свойство 14. *Пусть число a даёт при делении на m такой же остаток, как число c, а число b даёт при делении на m такой же остаток, как число d. Тогда число $a + b$ даёт при делении на m такой же остаток, как $c + d$.*

▼

Первый способ. Несложно убедиться в том, что числа дают одинаковые остатки от деления на m тогда и только тогда, когда их разность делится на m.

Условие тогда можно записать так: $a-c$ делится на m и $b-d$ делится на m. Отсюда $(a+b)-(c+d)=(a-c)+(b-d)$ делится на m (как сумма двух чисел, делящихся на m). Тогда $a+b$ и $c+d$ дают одинаковые остатки от деления на m.

Второй способ. Пусть числа a и c при делении на m дают остаток r_1, а числа b и d — остаток r_2. Тогда сумма $a+b$ при делении на m даёт такой же остаток, как сумма остатков r_1+ $+r_2$. Но и сумма $c+d$ при делении на m даёт такой же остаток, как сумма остатков r_1+r_2. Тогда $a+b$ и $c+d$ дают одинаковые остатки от деления на m (такой же, как сумма остатков r_1+r_2).

▲

Аналогично доказываются свойства разностей, произведений и степеней:

Свойство 15. *Пусть число a даёт при делении на m такой же остаток, как число c, а число b даёт при делении на m такой же остаток, как число d. Тогда число $a-b$ даёт при делении на m такой же остаток, как $c-d$.*

Свойство 16. *Пусть число a даёт при делении на m такой же остаток, как число c, а число b даёт при делении на m такой же остаток, как число d. Тогда число ab даёт при делении на m такой же остаток, как cd.*

Свойство 17. *Пусть число a даёт при делении на m такой же остаток, как число c. Тогда число an даёт при делении на m такой же остаток, как cn.*

Свойство 18. *Пусть число a даёт при делении на m такой же остаток, как число c. Тогда число a^n даёт при делении на m такой же остаток, как c^n.*

Пример 31. *Найдите остаток от деления числа 7^{100} на 8.*

▼

Число 7 при делении на 8 даёт такой же остаток, как и число -1 (потому что их разница равна $7-(-1)=8$, то есть делится на 8). Поэтому 7^{100} при делении на 8 даёт такой же остаток, как и число $(-1)^{100}$, то есть 1.

▲

Пример 32. *Докажите, что* $10^{99} + 12^{99}$ *делится на 11.*

▼

Число 10 при делении на 11 даёт такой же остаток, как и число -1. Поэтому 10^{99} при делении на 11 даёт такой же остаток, как и число $(-1)^{99}$, то есть -1.

Число 12 при делении на 11 даёт остаток 1, поэтому 12^{99} при делении на 11 даёт такой же остаток, как и число 1^{99}, то есть 1.

Но тогда $10^{99} + 12^{99}$ при делении на 11 даёт такой же остаток, как и число $(-1) + 1$, то есть 0. Значит, число $10^{99} + 12^{99}$ делится на 11.

▲

Как мы уже успели заметить, слова «число … при делении на m даёт такой же остаток, как и число …» в решении задач приходится повторять достаточно часто. Поэтому их можно заменить таким удобным обозначением:

Если число a при делении на m даёт такой же остаток, как и число b, то будем это записывать так:

$$a \equiv b(mod\ m) \text{ или } a \overset{m}{\equiv} b$$

Числа a и b при этом будем называть сравнимыми по модулю m.

С учётом этих обозначений решение предыдущей задачи запишется более компактно и аккуратно:

Пример 33. *Докажите, что* $10^{99} + 12^{99}$ *делится на 11.*

▼

$10 \overset{11}{\equiv} -1 \Rightarrow 10^{99} \overset{11}{\equiv} (-1)^{99} = -1.$

$10 \overset{11}{\equiv} 1 \Rightarrow 12^{99} \overset{11}{\equiv} 1^{99} = 1.$

Тогда $10^{99} + 12^{99} \overset{11}{\equiv} (-1) + 1 = 0 \Rightarrow 10^{99} + 12^{99} \,\vdots\, 11.$

▲

3.4 Задания для школьников

В этом разделе предлагаеюся комплекты заданий для использования на занятиях математического объединения по теме «Делимость и остатки». Задания будут разделены на группы: для решения на занятии (возможно даже для выдачи комплекта заданий школьникам) и для самостоятельного решения дома.

Делимость и остатки – 1

(Для учащихся 1 года обучения в группах 5-6 классов.)

Задания для решения на занятии

1. а) Разделите число 100 на 6 с остатком. Чему равно неполное частное? Чему равен остаток от деления?

   б) Впишите числа в прямоугольники, чтобы равенство стало верным: $100 = 6 \cdot \boxed{} + \boxed{}$.

2. а) Разделите число 1234 на 13 с остатком. Чему равно неполное частное? Чему равен остаток от деления?

   б) Впишите числа в прямоугольники, чтобы равенство стало верным: $1234 = 13 \cdot \boxed{} + \boxed{}$.

3. Найдите остатки от деления:

   а) 1234 на 8;
   б) 1000 на 13;
   в) 54321 на 11.

4. Найдите остатки от деления:

   а) $121 \cdot 200 + 132$ на 6;
   б) $100 \cdot 200 \cdot 300 + 400$ на 11;
   в) $1024 \cdot 1025 \cdot 1026 + 1027$ на 7.

5. На какую цифру заканчивается число $123 \cdot 456 \cdot 789$?

6. Из книги вырвали 3 страницы. Может ли сумма 6 чисел, являющихся номерами (с двух сторон) этих страниц, быть равной 320?

7. Одно число (делимое) разделили на другое число (делитель) с остатком. Делимое и делитель умножили на 3. Может ли при этом измениться остаток от деления?

8. На пне старого дуба было записано число 33. Каждый из 33 богатырей, проходя мимо пня, умножал записанное число на 2 (при этом стирал старое число и писал то, которое у него получилось). На какую цифру после этого будет заканчиваться записанное число?

9. Число при делении на 9 даёт остаток 5. Какой остаток даст это число при делении на 3? А какой остаток может быть у этого числа при делении на 6? Объясните свой ответ.

Примечание. Задачи, аналогичные предложенным, обсуждались выше при разборе данной темы.

Домашнее задание

1. На какую цифру заканчивается число $(102 \cdot 103 + 128) \cdot 193 + 126 \cdot 117$?

2. Число при делении на 16 даёт остаток 4. А какой остаток даст это число при делении на 8? А при делении на 4? Объясните свой ответ.

3. Придумайте такое натуральное число, чтобы оно при делении на 4 давало остаток 3, при делении на 5 — остаток 4, а при делении на 7 — остаток 6.

4. Покажите, что среди любых шести целых чисел найдутся два, разность которых кратна 5. Останется ли это утверждение верным, если вместо разности взять сумму?

Делимость и остатки – 2

(Для учащихся 2 года обучения в группах 6-8 классов.)

Задания для решения на занятии

1. Найдите остатки от деления:

   а) $200 \cdot 300 \cdot 400 + 500$ на 11;
   б) 100^6 на 7;
   в) $100^{100} + 200^{200}$ на 11.

2. На какую цифру заканчивается число 123^{123}?

3. Найдите остаток от деления $8^{100} + 9^{100} + 10^{100}$ на 8.

4. Докажите, что $10^{99} + 12^{99}$ делится на 11.

5. Из книги вырвали 25 страниц. Может ли сумма 50 чисел, являющихся номерами (с двух сторон) этих страниц, быть равной 2721?

6. Может ли число $2016^n + 2017^n + 2018^n$ оканчиваться на 7 при каком-нибудь натуральном n?

Примечание. Задачи, аналогичные предложенным, обсуждались выше при разборе данной темы.

Домашнее задание

1. На какую цифру заканчивается число 2014^{2015}?

2. Найдите остаток от деления $8^{100} + 9^{100} + 10^{100}$ на 7.

3. Придумайте нечётное натуральное число, чтобы оно при делении на 5 давало остаток 4, при делении на 7 — остаток 6, а при делении на 11 — остаток 10.

3.5 Дополнительные задачи

Как и ранее, предложенные задачи можно использовать при формировании комплекта заданий для учащихся математических объединений 1 года обучения в группах 6-7 классов, при повторении темы «Основы теории чисел» с учащимися 2 года обучения, а также в качестве дополнительных заданий в сильных группах 1 года обучения, сформированных из школьников 5 классов и 5-6 классов.

17. Найдите остаток от деления: а) 2^{100} на 3; б) 1000^{100} на 11.

18. На какую цифру оканчивается число 777^{777}?

19. На какую цифру оканчивается число 2019^{1989}? А на какие цифры оканчиваются числа 2019^{1992}, 2002^{1989}, 1992^{1992}?

20. В магазине было 6 ящиков, массы которых соответственно 15, 16, 18, 19, 20 и 31 килограммов. Две фирмы приобрели пять ящиков, причем одна из них взяла по массе яблок в два раза больше, чем другая. Какой ящик остался в магазине?

21. На занятии кружка 10 школьников решали 10 задач. Все школьники решили разное количество задач; каждую задачу решило одинаковое количество школьников. Один из этих десяти школьников, Боря, решил задачи с первой по пятую и не решил задачи с шестой по девятую. Решил ли он десятую задачу?

22. Докажите, что $30^{99} + 61^{100}$ делится на 31.

23. Докажите, что $n^3 + 2n$ делится на 3 при любом натуральном n.

24. Найдите последнюю цифру числа $7^{7^{7^7}}$.

25. Найдите остатки, от деления числа 2^{2015} на 3, 5, 7, ..., 17.

26. На Луне имеют хождение монеты достоинством в 1, 15 и 50 фертингов. Незнайка отдал за покупку несколько монет и получил сдачу — на одну монету больше. Какова наименьшая возможная цена покупки?

27. Сумма натуральных чисел a, b, c делится на 6. Докажите, что $a^3 + b^3 + c^3$ тоже делится на 6.

28. Сумма трех натуральных чисел, являющихся точными квадратами, делится на 9. Докажите, что из них можно выбрать два, разность которых также делится на 9.

4 Простые и составные числа

4.1 Основные понятия

Естественно, начнём с повторения определений.

Натуральное число $n > 1$ назовём *простым*, если оно имеет только два натуральных делителя — 1 и n (то есть делится только на 1 и на себя).

Натуральное число n назовём *составным*, если кроме 1 и n оно имеет и другие натуральные делители. Иначе говоря, составное число — это такое число, которое можно разложить на натуральные множители, большие 1.

Например, числа 5 и 17 — простые, а числа 4 и 105 — составные (потому что $4 = 2 \cdot 2$, а $105 = 3 \cdot 35$).

Отметим, что число 1 не считается ни простым, ни составным. Зачем это нужно — об этом мы поговорим совсем скоро.

Как мы уже упоминали, составное число n можно разбить на множители, каждый из которых больше 1 (и при этом, очевидно, меньше n). На этом можно не останавливаться, а эти множители тоже разложить на более мелкие множители, если это возможно, и продолжить этот процесс. Например, в разложении $105 = 3 \cdot 35$ множитель 35 можно ещё разложить: $105 = 3 \cdot 35 = 3 \cdot 5 \cdot 7$.

Когда же этот процесс разложения остановится? Очевидно, когда все полученные множители окажутся неразложимыми (то есть простыми). Почему же этот момент наступит? Это можно доказать разными способами: например, оценить количество множителей (показать, что оно не может быть сколь угодно большим) или воспользоваться методом математической индукции.

Таким образом, мы установили важный факт:

Любое натуральное число $n > 1$ или само по себе является простым, или может быть разложено на простые множители.

Впрочем, простое число можно тоже считать разложенным на простые множители, только этот множитель ровно один. Поэтому упоминание «или само по себе является простым» можно даже считать излишним.

А можно ли одно число разложить на простые множители разными способами? Конечно, можно привести пример (допустим, $35 = 5 \cdot 7 = 7 \cdot 5$), поэтому сделаем важное уточнение: будем считать одинаковыми разложения, которые отличаются только порядком множителей. Например, $5 \cdot 7$ — то же самое, что $7 \cdot 5$. А вот $17 \cdot 3$ и $7 \cdot 13$ — это разные разложения (хотя бы потому, что в первом есть множитель 3, а во втором нет).

Оказывается, что разложение числа на простые множители является единственным. Вместе с ранее доказанным фактом существования разложения на простые множители это составляет *основную теорему арифметики*:

> *Любое натуральное число $n > 1$ может быть разложено на простые множители, причём единственным образом.*

Единственность, конечно же, здесь считается с точностью до перестановок множителей.

Всё же вернёмся к числу 1. Почему же его «обидели», исключив из числа простых чисел? Вроде как, вполне подходит под определение «делится только на 1 и на себя», но объявлено особенным числом — ни простым, ни составным. Во многом причина в единственности разложения числа на простые множители. Если объявить 1 простым числом, то единственности разложения уже не будет: например, $35 = 5 \cdot 7 = 1 \cdot 1 \cdot 5 \cdot 7$. Конечно, для числа 1 можно было бы сделать оговорку (в духе «...причём единственным образом (с точностью до перестановки множителей и количества единиц в разложении)»), но показалось более удобным наделить число 1 особым исключительным статусом.

Пример 34. *Может ли сумма трёх последовательных натуральных чисел быть простым числом?*

▼

Не может.

Докажем, что эта сумма делится на 3. Действительно, если эти числа равны n, $n+1$ и $n+2$, то их сумма равна $n+(n+1)+(n+2) = 3n+3$ — делится на 3. Более того, эта сумма равна $3\cdot(n+1)$ — то есть раскладывается в произведение двух натуральных множителей больших 1, поэтому является составным числом.

▲

4.2 Свойства простых чисел

Свойство 19. *Наименьший положительный и отличный от 1 делитель натурального числа, большего единицы, является простым числом.*

▼

Пусть a — натуральное число, большее единицы, и b — наименьший положительный и отличный от единицы делитель числа a. Докажем, что b — простое число.

Предположим противное: b — составное число. Тогда существует делитель числа b (обозначим его b_1), который отличен как от 1, так и от b. Если также учесть, что абсолютная величина делителя не превосходит абсолютной величины делимого (это мы знаем из свойств делимости), то должно выполняться условие $1 < b_1 < b$. Но так как a делится на b, а b делится на b_1, то a делится и на b_1 (по свойству 5), причём $1 < b_1 < b$. Но тогда b — не наименьший отличный от единицы делитель числа a, что противоречит условию.

▲

Свойство 20. *Простых чисел бесконечно много.*

▼

Предположим, что это не так — то есть предположим, что простых чисел конечное число. Тогда выпишем все эти простые числа: p_1, p_2, ..., p_n. Покажем, что мы всегда можем найти простое число, отличное от указанных.

Рассмотрим число $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Понятно, что это число отлично от каждого из простых чисел p_1, p_2, ..., p_n. Если число p — простое, то теорема доказана. Если же это число составное, то в силу предыдущей теоремы существует простой делитель этого числа (обозначим его p_{n+1}). Покажем, что этот делитель не совпадает ни с одним из чисел p_1, p_2, ..., p_n. Если бы это было не так, то по свойствам делимости произведение $p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n$ делилось бы на p_{n+1}. Но на p_{n+1} делится и число $p = p_1 \cdot p_2 \cdot \ldots \cdot p_n + 1$. Отсюда следует, что на p_{n+1} должно делиться второе слагаемое этой суммы, которое равно единице, а это невозможно. Так доказано, что всегда может быть найдено новое простое число, не заключающееся среди любого количества наперед заданных простых чисел. Следовательно, простых чисел бесконечно много.

▲

Свойство 21. *Пусть p — простое число. Тогда если $ab \,\vdots\, p$, то $a \,\vdots\, p$ или $b \,\vdots\, p$ (аналогично для произвольного количества множителей).*

▼

Доказательство этого факта, конечно, можно было бы провести с помощью основной теоремы арифметики. Однако напомним, что её мы пока что не доказали, а поэтому такой способ «доказательства» является некорректным. Более того, в дальнейшем мы как раз основную теорему арифметики докажем с помощью рассматриваемого свойства, поэтому сейчас этот факт мы пока оставим без доказательства, а потом к нему вернёмся.

▲

4.3 Разбор задач

Пример 35. *Разложите на простые множители числа 91, 128 и 900.*

▼

$91 = 7 \cdot 13.$

$128 = 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2 \cdot 2.$

$900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 6.$

▲

Пример 36. *Найдите все простые числа, которые отличаются на 17.*

▼

Пусть n и $n+17$ — простые числа. Если n нечётно, то $n+17$ чётно и больше 2, поэтому не простое. Тогда n чётно, но есть только одно чётное простое число: $n=2$. Это соответствует паре простых чисел 2 и 19.

▲

Пример 37. *Найдите два таких простых числа, что и их сумма, и их разность — тоже простые числа.*

▼

Если оба числа нечётные, то и сумма их, и разность будут чётны, а чётное простое число всего одно. Это значит, что среди искомых простых чисел обязательно одно чётное, т.е. одно число равно 2. Чтобы подобрать второе число, нужно иметь в виду, что разность, второе число и сумма являются последовательными нечётными числами. Среди таких чисел одно обязательно делится на 3. Значит, все три простыми могут быть только в случае, когда одно из них равно 3. Итак, одно из чисел равно 2, разность (или сумма) равна 3. Единственная возможность — числа 2 и 5.

▲

Пример 38. *Известно, что $p>3$ и p — простое число. Как вы думаете: а) будут ли чётными числа $(p+1)$ и $(p-1)$; б) будет ли хотя бы одно из них делиться на 3?*

▼

Поскольку p — простое и больше 3, то среди делящихся на 2 его не будет, а среди трех последовательных чисел $p-1$, p, $p+$ $+\,1$, одно обязательно делится на 2, но это не p. Значит, ответ задачи (а) положительный. Для 3 задача решается аналогично, ответ положительный.

Обратите внимание! Здесь мы пользуемся тем, что простое число не может делиться на 2 или 3. Будьте осторожны — это не всегда так. Есть два простых числа 2 и 3, для которых эти соображения неверны. Но в нашем условии указано, что $p>3$, значит, мы можем пользоваться этим свойством.

▲

Пример 39. *Известно, что $p > 3$ и p — простое число. Как вы думаете, будет ли хотя бы одно из чисел $(p+1)$ и $(p-1)$ делиться на 4? А на 5?*

▼

При $p = 13$ ни одно из чисел не делится на 5. Теперь разберемся с делимостью на 4. Рассмотрим числа $p-1$, p, $p+1$, $p+2$. Из четырех последовательных чисел одно обязательно делится на 4, но это не p (оно простое) и не $p+2$ (оно нечётное). Значит, одно из чисел $p+1$ или $p-1$ будет делиться на 4.

▲

Пример 40. *В семье шестеро детей. Пятеро из них соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше младшего, причём возраст каждого ребёнка — простое число. Сколько лет младшему?*

▼

Возраст младшего ребенка не может быть чётным числом, так как иначе возрасты старших детей не будут простыми числами. Он не может оканчиваться на 1, 3, 7, 9 — иначе возраст одного из старших детей будет делиться на 5 (так как будет оканчиваться на 0 или на 5). Тогда возраст младшего ребёнка может оканчиваться только на 5. Единственное простое число, удовлетворяющее этим условиям, — 5 (иначе возраст младшего делится на 5 и больше пяти). Проверка показывает, что если возраст младшего ребенка будет равен 5 годам, возрасты всех старших будут выражаться простыми числами.

Ответ: 5 лет.

▲

Пример 41. *Известно, что остаток от деления некоторого простого числа на 60 равен составному числу. Какому?*

▼

Ответ: 49

Так как $60 = 2\cdot2\cdot3\cdot5$, то остаток не может быть кратен числам 2, 3 или 5 (иначе исходное число обладало бы тем же свойством и не могло бы оказаться простым). Так как остаток меньше чем 60 и является произведением хотя бы двух простых множителей, то он равен $7 \cdot 7$. Другие варианты невозможны, поскольку уже следующее произведение двух простых чисел $(7 \cdot 11)$ больше 60.

▲

Пример 42. *Известно, что числа p и p^2+2 — простые. Докажите, что число p^3+2 также является простым.*

▼

Если p делится на 3, то (так как p простое) $p=3$, при этом p^2+ $+2=3^2+2=11$ — простое число. Непосредственно убеждаемся, что $p^3+2=3^3+2=29$ — простое.

Если p не делится на 3, то при делении на 3 оно может иметь остатки 1 или 2. Если при делении на 3 число p даёт остаток 1, то p^2 тоже будет давать остаток 1, тогда p^2+2 делится на 3 (и больше 3), поэтому не может быть простым. Аналогично разбирается случай, когда p при делении на 3 даёт остаток 2.

▲

Пример 43. *Можно ли клетки таблицы 2015×2016 заполнить натуральными числами так, чтобы суммы чисел в каждом столбце и суммы чисел в каждой строке были бы простыми числами?*

▼

Предположим, что мы сумели расставить числа требуемым образом. Тогда сумма чисел в каждом столбце (каждой строке) больше 2. Поэтому все соответствующие суммы нечётны, так как они простые и больше 2. Следовательно, сумма всех чисел в таблице с одной стороны равна сумме 2015 нечётных чисел, то есть нечётна, а с другой стороны, она равна сумме 2016 нечётных чисел, то есть чётна. Противоречие.

▲

Пример 44. *Найдите все простые числа, которые нельзя записать в виде суммы двух составных.*

▼

Докажем, что любое простое число $p > 11$, представляется в виде суммы двух составных. Поскольку любое простое число, большее двух, нечетно, то число p — нечетное, а $p-9$ — четное (и больше 2) и, следовательно, составное. Поэтому $p=(p-9)+9$ — искомое представление. С другой стороны, непосредственно проверяется, что все простые числа, меньшие или равные 11 (а это — 2, 3, 5, 7 и 11), не представимы в виде суммы двух составных.

▲

4.4 Задания для школьников

В этом разделе предлагаеюся комплекты заданий для использования на занятиях математического объединения по теме «Основы теории чисел» («Простые и составные числа»). Задания будут разделены на группы: для решения на занятии (возможно даже для выдачи комплекта заданий школьникам) и для самостоятельного решения дома.

Простые и составные числа

(Для учащихся 2 года обучения в группах 6-8 классов.)

Задания для решения на занятии

1. Разложите на простые множители числа: 256, 10000, 1225, 1287, 2015, 2016.

2. Является ли простым число 123456789?

3. Может ли сумма двух простых чисел быть равной 2015?

4. Простые числа 2 и 3 отличаются на 1. Найдутся ли ещё такие пары простых чисел, отличающихся на 1? Обоснуйте свой ответ.

5. Может ли сумма трёх последовательных натуральных чисел быть простым числом?

6. Известно, что $p > 3$ и p — простое число. Как вы думаете: а) будут ли чётными числа $(p+1)$ и $(p-1)$; б) будет ли хотя бы одно из них делиться на 3?

7. В семье шестеро детей. Пятеро из них соответственно на 2, 6, 8, 12 и 14 лет старше младшего, причём возраст каждого ребёнка — простое число. Сколько лет младшему?

8. Можно ли все клетки таблицы 2015×2016 заполнить натуральными числами так, чтобы суммы чисел в каждом столбце и суммы чисел в каждой строке были бы простыми числами?

Примечание. Предложенные задачи и аналогичные им обсуждались выше при разборе данной темы.

Домашнее задание

1. Известно, что число p — простое. Докажите, что число $p^4 + 5$ — составное.

2. Найдите два таких простых числа, что и их сумма, и их разность — тоже простые числа. (Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему нет других.)

3. Найдите все простые числа, которые нельзя записать в виде суммы двух составных.

4.5 Дополнительные задачи

29. Разложите на простые множители число 3650.

30. В книге рекордов Гиннесса написано, что наибольшее известное простое число равно $23021^{377} - 1$. Не опечатка ли это?

31. Докажите, что любое простое число, большее трех, можно записать в одном из двух видов: $6n + 1$ либо $6n - 1$, где n — натуральное число.

32. Четверо ребят обсуждали ответ к задаче.
Коля сказал: «Это число 9».
Роман: «Это простое число».
Катя: «Это четное число».
А Наташа сказала, что это число делится на 15.

Один мальчик и одна девочка ответили верно, а двое остальных ошиблись. Какой ответ в задаче на самом деле?

33. Найдите все p такие, что числа p, $p+10$, $p+14$ — простые.

34. Найдите все простые числа, которые равны сумме двух простых чисел и разности двух простых чисел.

35. Поставьте в ряд а) 5 простых чисел, б) 6 простых чисел так, чтобы разности соседних чисел в каждом ряду были равны.

36. Является ли число $4^9 + 6^{10} + 3^{20}$ простым?

37. Найдите все пары простых чисел, разность квадратов которых является простым числом.

38. Доказать, что произведение n первых простых чисел не является полным квадратом.

5 НОД и НОК

5.1 Основные определения

Аббревиатуры НОД и НОК обычно школьникам знакомы, однако не будет лишним аккуратно напомнить основные понятия. Начнём с понятия общего делителя и общего кратного.

Число d называется *общим делителем* натуральных чисел a и b, если каждое из них делится на d ($a \,\vdots\, d$ и $b \,\vdots\, d$).

Число D называется *общим кратным* натуральных чисел a и b, если оно делится на каждое из них ($D \,\vdots\, a$ и $D \,\vdots\, b$).

Теперь можно и определить понятия НОД и НОК. В школе обычно они определяются так:

> *Число d называется* наибольшим общим делителем *(НОД) натуральных чисел a и b, если это самое большое натуральное число, на которое делится каждое из чисел a и b.*

> *Число D называется* наименьшим общим делителем *(НОК) натуральных чисел a и b, если это самое маленькое натуральное число, которое делится на каждое из чисел a и b.*

Более корректно понятие наибольшего общего делителя определить так: число d называется *наибольшим общим делителем* (НОД) натуральных чисел a и b, если

1. оно является общим делителем чисел a и b,

2. оно делится на любой другой общий делитель чисел a и b.

Тем не менее, для целых чисел это является эквивалентной формулировкой (доказать это можно самостоятельно).

Как правило, школьникам предлагается следующий алгоритм поиска наибольшего общего делителя чисел a и b:

1. Разложить a и b на простые множители.

2. Найти общие простые множители в этих разложениях. Если простой множитель несколько раз присутствует как в одном, так и в другом разложении, то берём его столько раз, сколько он гарантированно входит в каждое из них.

3. НОД — это произведение найденных общих простых делителей.

Пример 45. *Найдите НОД*$(900, 350)$.

▼

Разложим числа на простые множители:

$900 = 2 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 3 \cdot 5 \cdot 5$,

$350 = 2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 7$.

Множитель 2 входит в разложение числа 900 два раза, а в разложение числа 350 — один раз. Поэтому его берём тоже один раз (минимум из вхождений в разложения чисел 900 и 350).

Множитель 3 входит в разложение числа 900, а в разложении числа 350 его нет, поэтому общим он не является.

Множитель 5 входит в разложение числа 900 два раза, и в разложение числа 350 — тоже два раза. Поэтому его берём тоже дважды.

Множитель 7 входит в разложение числа 350, а в разложении числа 900 его нет, поэтому общим он не является.

Других простых множителей в разложениях нет. Поэтому осталось только собрать найденные общие простые множители: это 2 (один раз) и 5 (два раза). Поэтому НОД$(900, 350) = 2 \cdot 5 \cdot 5 = 50$.

▲

5.2 Алгоритм Евклида

У рассмотренного «традиционного» алгоритма нахождения НОД при всей его простоте есть одно уязвимое место. Рассмотрим его на простом примере.

Пример 46. *Найдите НОД*$(323, 437)$.

▼

Разложим числа на простые множители: ...

Так. Небольшая заминка: найти разложение чисел 323 и 437 на простые множители не так-то просто. Возьмём число 323, начнём его делить на небольшие простые числа. На 2 оно не делится, на 3 — тоже не делится (удобно при этом знать признаки делимости, но можно проверить и непосредственным делением в столбик), на 5 — не делится, на 7 — не делится. Делить на 11, на 13 или на что-либо ещё уже совсем не хочется... Может быть, оно вообще простое? А ведь ещё предстоит то же самое для числа 437.

Становится понятно, в чём проблема: разложение числа на простые множители порой оказывается очень трудоёмкой задачей. Но ведь именно на этом и основан рассмотренный выше способ нахождения НОД.

Всё же разрушим интригу: $323 = 17 \cdot 19$, $437 = 19 \cdot 23$, а так как у них только один общий простой множитель (19), то он же является и их наибольшим общим делителем. Однако хорошо бы рассмотреть какой-нибудь альтернативный способ, позволяющий находить НОД без разложения на простые множители (тем более, весь набор простых множителей нам и не нужен).

▲

Такой «альтернативный» способ есть — он известен уже примерно два тысячелетия под названием «алгоритм Евклида». Основан он на одном простом факте:

Свойство 22. *НОД*$(a, b) =$ *НОД*$(a - b, b)$

▼

Иначе говоря, если одно из двух чисел заменить на разность между этими числами, то НОД от этого не изменится.

Докажем более общий факт: множество общих делителей пары чисел (a, b) совпадает с множеством общих делителей пары чисел $(a - b, b)$. Для этого достаточно доказать, что

1. любой общий делитель чисел a и b также является и общим делителем чисел $a - b$ и b;

2. любой общий делитель чисел $a - b$ и b также является и

общим делителем чисел a и b.

1) Пусть d — общий делитель чисел a и b. То есть, $a \vdots d$ и $b \vdots d$. Но тогда $(a-b) \vdots d$ (по свойствам делимости). А раз $(a-b) \vdots d$ и $b \vdots d$, то d также является и общим делителем чисел $a-b$ и b. В одну сторону доказано.

2) Теперь докажем в обратную сторону. Пусть d — общий делитель чисел $a-b$ и b. То есть, $(a-b) \vdots d$ и $b \vdots d$. Но тогда $a = (a-b)+b \vdots d$ (по свойствам делимости). А раз $a \vdots d$ и $b \vdots d$, то d также является и общим делителем чисел a и b.

▲

Пример 47. *Найдите НОД*$(323, 437)$.

▼

Да, это та же самая задача. Однако решим её с помощью алгоритма Евклида. На основе доказанного основного свойства будем действовать по такому плану:

> *Вычитаем из большего числа меньшее до тех пор, пока одно из чисел не станет равно 0 (и тогда НОД равен второму числу).*

Действительно, при этих вычитаниях НОД двух чисел не изменится, а если одно из чисел станет равно 0, то оно делится на любой делитель, поэтому наибольший общий делитель равен оставшемуся ненулевому числу.

Итак, приступим.

НОД$(323, 437)$ = НОД$(323, 114)$ = НОД$(323, 114)$ = = НОД$(209, 114)$ = НОД$(95, 114)$ = НОД$(95, 19)$ = = НОД$(76, 19)$ = НОД$(57, 19)$ = НОД$(38, 19)$ = НОД$(19, 19)$ = = НОД$(0, 19) = 19$.

▲

Интересен тот факт, что для нахождения наибольшего общего *делителя* собственно делить нам и не пришлось. Затруднения возникли разве что в самом конце — пришлось многократно вычитать из первого числа второе, прежде чем получился 0 (и изначально было не так уж очевидно, что получится 0, — возможно, пришлось бы продолжить этот процесс). Однако и здесь можно значительно сократить объём вычислений, всё же воспользовавшись делением.

Как долго мы будем вычитать из первого числа второе? Пока не получим разность, меньше этого второго числа (если это будет 0, то на этом и закончим, а если не 0, то теперь уже из второго числа будем вычитать первое). Но чему же равны эта разность, которая останется после такого вычитания? А это ни что иное как остаток от деления первого числа на второе. Таким образом, алгоритм Евклида можно немного поправить, но сначала введём полезное обозначение (которое можно было бы объявить и раньше):

Остаток от деления a на b будем обозначать как $a \mod b$.

А теперь опишем основной факт, на котором основывается улучшенный вариант алгоритма Евклида:

Свойство 23. *НОД*$(a, b) =$ *НОД*$(a \mod b, b)$

▼

Иначе говоря, если одно из двух чисел заменить на остаток от деления этого числа на другое, то НОД от этого не изменится.

Так как остаток от деления a на b — это результат последовательного вычитания b из a, то это ключевое свойство напрямую следует из справедливости свойства 22.

▲

Пример 48. *Найдите НОД*$(1234, 5678)$.

▼

На основе доказанного основного свойства будем действовать по такому плану:

Заменяем большее число на его остаток при делении на меньшее до тех пор, пока одно из чисел не станет равно 0 (и тогда НОД равен второму числу).

Отметим, что свойство 22 не перестало быть верным, поэтому если вдруг захочется не делить, а вычитать, то это вполне допустимо.

НОД$(1234, 5678)$ = НОД$(1234, 742)$ = НОД$(492, 742)$ = = НОД$(492, 250)$ = НОД$(242, 250)$ = НОД$(242, 8)$ = НОД$(2, 8)$ = = НОД$(2, 0) = 2$.

▲

Особо отметим, что теперь совершенно не требуется предварительно решать трудную задачу разложения числа на простые множители.

5.3 Свойства НОД и НОК

Отметим некоторые полезные свойства НОД, некоторыми из которых мы неявно уже воспользовались.

Свойство 24. *НОД(a, b) = НОД(b, a)*

Свойство 25. *Если m — любое натуральное число, то НОД$(m \cdot a, m \cdot b) = m \cdot$ НОД(a, b).*

▼

Обоснование этого свойства наибольшего общего делителя таково. Если умножить на m обе стороны каждого из равенств (шагов) алгоритма Евклида, то получим, что НОД$(m \cdot a, m \cdot b)$ = $= m] \cdot r_k$, а r_k — это НОД(a, b). Следовательно, НОД$(m \cdot a, m \cdot b)$ = $= m \cdot$ НОД(a, b).

Именно на этом свойстве наибольшего общего делителя основан способ нахождения НОД с помощью разложения на простые множители.

▲

Свойство 26. *Пусть p — любой общий делитель чисел a и b. Тогда НОД$(a : p, b : p)$ = НОД$(a, b) : p$. В частности, если $p =$ = НОД(a, b), то НОД$(a :$ НОД$(a, b), b :$ НОД$(a, b))$ = НОД$(a, b) :$ НОД$(a, b) = 1$, то есть числа $a :$ НОД(a, b) и $b :$ НОД(a, b) — взаимно простые.*

▼

Так как $a = p \cdot (a : p)$ и $b = p \cdot (b : p)$, то в силу предыдущего свойства, мы можем записать цепочку равенств вида НОД(a, b) = = НОД$(p \cdot (a : p), p \cdot (b : p)) = p \cdot$ НОД$(a : p, b : p)$, откуда и следует доказываемое равенство.

Только что доказанное свойство наибольшего общего делителя лежит в основе приведения обыкновенных дробей к несократимому виду.

▲

Свойство 27. *Пусть a и b — целые числа, одновременно не равные нулю, тогда существуют такие целые числа u и v, что справедливо равенство НОД$(a, b) = a \cdot u + b \cdot v$. Последнее равенство представляет собой линейное представление наибольшего общего делителя чисел a и b, это равенство называют соотношением Безу, а числа u и v — коэффициентами Безу.*

▼

По алгоритму Евклида мы можем записать следующие равенства

Из первого равенства имеем $r_1 = a - b \cdot q_1$, и, обозначив $1 = s_1$ и $-q_1 = t_1$, это равенство примет вид $r_1 = s_1 \cdot a + t_1 \cdot b$, причем числа s_1 и t_1 — целые. Тогда из второго равенства получим $r_2 = b - r_1 \cdot q_2 = b - (s_1 \cdot a + t_1 \cdot b) \cdot q_2 = -s1 \cdot q_2 \cdot a + (1 - t_1 \cdot q_2) \cdot b$. Обозначив $-s_1 \cdot q_2 = s_2$ и $1 - t_1 \cdot q_2 = t_2$, последнее равенство можно записать в виде $r_2 = s_2 \cdot a + t_2 \cdot b$, причем s_2 и t_2 — целые числа (так как сумма, разность и произведение целых чисел является целым числом). Аналогично из третьего равенства получим $r_3 = s_3 \cdot a + t_3 \cdot b$, из четвертого $r_4 = s_4 \cdot a + t_4 \cdot b$, и так далее. Наконец, $r_k = s_k \cdot a + t_k \cdot b$, где s_k и t_k — целые. Так как $r_k =$ НОД(a, b), и, обозначив $s_k = u$ и $t_k = v$, получим линейное представление НОД требуемого вида: НОД$(a, b) = a \cdot u + b \cdot v$.

▲

Свойство 28. *НОД$(a, b) \cdot$ НОК$(a, b) = ab$.*

Пример 49. *Коля, Серёжа и Ваня регулярно ходили в кинотеатр. Коля бывал в нём каждый 3-й день, Серёжа — каждый 7-й, Ваня — каждый 5-й. Сегодня все ребята были в кино. Когда все трое встретятся в кинотеатре в следующий раз?*

▼

Начнём отсчитывать дни от первого посещения кинотеатра всеми мальчиками. Номер дня, когда в кинотеатр приходит Коля, делится на 3, когда приходит Серёжа — делится на 7 и т.д. Значит, чтобы все трое пришли в кинотеатр, номер дня должен одновременно делиться на 3, на 5 и на 7. Таким образом, номер этого дня должен делиться на 105, т.е. 105, 210, 315 и т.д. Поскольку нас интересует самый первый день, то это день под номером 105 (это значит, что до встречи ребятам придётся ходить в кинотеатр больше трёх месяцев).

▲

Пример 50. *Существуют ли 6 последовательных натуральных чисел таких, что наименьшее общее кратное первых трех из них больше, чем наименьшее общее кратное трех следующих?*

▼

Да, существуют. Например, тройки 17, 18, 19 и 20, 21, 22. Действительно, НОК(17,18,19)=$17 \cdot 18 \cdot 19$=5814, а НОК(20,21,22)=$10 \cdot 21 \cdot 22$=4620.

▲

Пример 51. *Доказать, что дробь* $\dfrac{12n+1}{30n+1}$ *несократима.*

▼

$5(12n+1) - 2(30n+1) = 3$, поэтому НОД$(12n+1, 30n+1)$ равен 3 или 1. Но $12n+1$ на 3 не делится.

▲

Пример 52. *Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?*

▼

Если разделить 77 на количество минут в часе, получится количество часов в сутках. Если разделить 91 на количество минут в часе, получится количество секунд в минуте. Значит, на количество минут в часе и 77, и 91 делятся нацело. НОД(77, 91) = 7. Поскольку в часе более одной минуты, в нём должно быть 7 минут — ни на какое другое число, большее единицы, 77 и 91 одновременно не делятся. Тогда в сутках 77 : 7 = 11 часов и $11 \cdot 91 = 1001$ секунда.

▲

Пример 53. *Фома и Ерёма нашли на дороге по пачке 11-рублевок. В чайной Фома выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Ерёма выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Фома может расплатиться 11-рублевками без сдачи.*

Покажите, что это может сделать и Ерёма.

▼

Первое решение. Фома смог за свою покупку расплатиться 11-рублёвыми купюрами. Если мы к его покупке добавим 33 ч и 11 б (т.е. 33 стакана чая и 11 бубликов), то за всё в сумме тоже можно будет расплатиться 11-рублевками. Но эта покупка составляет 36 ч+4 к+16 б, т.е. ровно в 4 раза больше покупки Еремы. Но числа 4 и 11 взаимно просты, поэтому и за четверть большой покупки (за покупку Еремы) можно расплатиться 11-рублевками без сдачи, что и требовалось доказать.

Второе решение. Умножим то, что купил Фома на три — выйдет 9 стаканов, 12 калачей и 15 бубликов. Это тоже делится на 11. Затем отнимем 11 калачей и 11 бубликов (вычтем их цену, отсчитав ее 11-рублевками) и получим то, что купил Ерёма. Значит Ерёма тоже может расплатиться 11-рублевками.

▲

Пример 54. *Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий – ездить в магазин за продуктами, а каждый пятый день — решать задачи по математике. (В первый день Петя сделал и первое, и второе, и третье и очень устал.) Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ни ездить в магазин, ни решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?*

▼

Занумеруем дни числами от 0 до 89. Петя купается в дни с чётными номерами, ездит в магазин в дни с номерами, кратными 3, и решает задачи в дни, с номерами, кратными 5. Таким образом, нам следует ответить на два вопроса: 1) сколько существует чётных чисел от 0 до 89, которые не делятся ни на 3, ни на 5; 2) сколько существует нечётных чисел от 0 до 89, которые не делятся ни на 3, ни на 5? Ответы на эти вопросы одинаковы. Действительно, разобьём наши числа на пары с разностью 45: 0, 45, 1, 46, ..., 44, 89. В каждой паре – два числа разной четности, при этом если одно из чисел пары не делится ни на 3, ни на 5, то и второе тоже. Поэтому достаточно ответить на вопрос 1). Заметим, что чётных чисел от 0 до 89 ровно половина, то есть 45. Из них каждое третье кратно 3 (всего 15 чисел), каждое пятое кратно 5 (9 чисел) и каждое пятнадцатое кратно 15 (3 числа). Таким образом, чётных чисел, кратных либо 3, либо 5, ровно 15 + 9 – 3 = 21 (мы вычитаем 3, так как в сумме 15 + 9 числа, кратные 15, сосчитаны дважды). Значит, интересующих нас чисел 45 – 21 = 24.

▲

Пример 55. *Дан прямоугольник 100×101, разбитый линиями сетки на единичные квадратики. Найдите число отрезков, на которое линии сетки разбивают диагональ.*

▼

Каждая из 100 горизонтальных и каждая из 99 вертикальных линий сетки, идущих внутри прямоугольника, пересекает диагональ в некоторой точке. Покажем, что не найдется горизонтальной и вертикальной линий сетки, пересекающих диагональ в одной точке. После этого решение становится ясным — 199 различных точек пересечения горизонтальных и вертикальных линий сетки с диагональю разделят диагональ на 200 отрезков. Для удобства введем систему координат так, чтобы начало координат совпадало с одной из вершин прямоугольника. Диагональ соединяет начало координат с точкой (100;101). Если бы нашлись горизонтальная и вертикальная линии сетки, пересекающие диагональ в одной точке, то эта точка лежала бы на диагонали и имела бы целые координаты $(a; b)$. Так как угловой коэффициент диагонали равен 101/100, то должно выполняться $b/a = 101/100$, а это невозможно, поскольку $0 < a < 100$, $0 < b < 101$ и дробь 101/100 несократима.

Ответ: 200

▲

Пример 56. *Найти все такие натуральные k, которые можно представить в виде суммы двух взаимно простых чисел, отличных от 1.*

▼

Любое нечётное число $k = 2n + 1 > 3$ легко представить в нужном виде: $k = n + (n + 1)$. Чётное число, кратное 4, ($k = 4n$) представляется в виде суммы чисел $2n + 1$ и $2n - 1$. Последнее число больше 1 при $k \geqslant 8$. Наконец, число k вида $4n + 2$ представляется в виде суммы $(2n+3)+(2n-1)$. Эти числа взаимно просты, поскольку из разность равна 4, а 4 взаимно просто с любыми нечётными числами. Последнее число больше 1 при $k \geqslant 10$. Таким образом, мы представили в нужном виде все числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6. Нетрудно проверить, что ни одно этих чисел в требуемом виде представить нельзя.

Ответ: все натуральные числа, кроме 1, 2, 3, 4 и 6.

▲

Пример 57. *Может ли произведение трех последовательных натуральных чисел быть степенью натурального числа (квадратом, кубом и т.д.)?*

▼

Пусть такие числа нашлись — это числа $n-1$, n, $n+1$, и их произведение является m-ой степенью натурального. Поскольку число n взаимно просто с числами $n-1$ и $n+1$, то любой простой делитель числа n входит в разложение числа $(n-1)n(n+1)$ с таким же показателем, с каким он входит в разложение числа n, т.е. он входит в разложение числа n в степени, кратной m. Поэтому n (а следовательно, и n^2) является m-ой степенью натурального числа. Тогда $(n-1)(n+1) = n^2-1$ также является m-ой степенью натурального числа, как частное от деления чисел $(n-1)n(n+1)$ и n, являющихся m-ыми степенями. Таким образом, нами найдены два последовательных натуральных числа — n^2 и n^2-1, являющиеся m-ыми степенями. Ясно, что это невозможно, тем самым получено противоречие.

▲

5.4 Задания для школьников

В этом разделе предлагает комплект заданий для использования на занятиях математического объединения по теме «Основы теории чисел» («НОД и НОК»). Задания будут разделены на группы: для решения на занятии (возможно даже для выдачи комплекта заданий школьникам) и для самостоятельного решения дома.

НОД и НОК

(Для учащихся 2 года обучения в группах 6-8 классов.)

Задания для решения на занятии

1. Найдите с помощью разложения на простые множители:

   (a) $НОД(100, 36)$ и $НОК(100, 36)$;
   (b) $НОД(144, 225)$ и $НОК(144, 225)$;
   (c) $НОД(264, 715)$.

2. Найдите НОД чисел:

   (a) 175 и 624,
   (b) 403 и 257,
   (c) 403 и 247.

3. Конфеты «Сладкая математика» продаются по 12 штук в коробке, а конфеты «Геометрия с орехами» — по 15 штук в коробке. Какое наименьшее число коробок конфет того и другого сорта необходимо купить, чтобы тех и других конфет было поровну?

4. Коля, Серёжа и Ваня регулярно ходили в кинотеатр. Коля бывал в нём каждый 3-й день, Серёжа — каждый 7-й, Ваня — каждый 5-й. Сегодня все ребята были в кино. Когда все трое встретятся в кинотеатре в следующий раз?

5. Найдите такие целые x и y, что

   (a) $НОД(6, 4) = 6x + 4y$,
   (b) $НОД(36, 24) = 36x + 24y$,
   (c) $НОД(69, 35) = 69x + 35y$.

6. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

7. Фома и Ерёма нашли на дороге по пачке 11-рублевок. В чайной Фома выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Ерёма выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Фома может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Ерёма.

8.

Примечание. Предложенные задачи и аналогичные им обсуждались выше при разборе данной темы.

Домашнее задание

1. Найдите НОД чисел:

    (a) 137 и 257,
    (b) 493 и 703.

2. Существуют ли 6 последовательных натуральных чисел таких, что наименьшее общее кратное первых трех из них больше, чем наименьшее общее кратное трех следующих?

3. Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий – ездить в магазин за продуктами, а каждый пятый день — решать задачи по математике. (В первый день Петя сделал и первое, и второе, и третье и очень устал.)

Сколько будет у Пети «приятных» дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ни ездить в магазин, ни решать задачи? Сколько «скучных», когда совсем не будет никаких дел?

5.5 Дополнительные задачи

39. Найдите НОД$(256, 90)$.

40. Найдите НОД$(528, 5654)$.

41. Доказать, что числа $27x + 4$ и $18x + 3$ взаимно простые при любом натуральном x.

42. Игорь закрасил в квадрате 6×6 несколько клеток. После этого оказалось, что во всех квадратиках 2×2 одинаковое число закрашенных клеток и во всех полосках 1×3 одинаковое число закрашенных клеток. Докажите, что старательный Игорь закрасил все клетки.

43. Отец говорит сыну:

– Сегодня у нас у обоих день рождения, и ты стал ровно в 2 раза моложе меня.

– Да, и это восьмой раз за мою жизнь, когда я моложе тебя в целое число раз.

Сколько лет сыну, если отец не старше 75 лет?

44. Пять моряков высадились на остров и к вечеру набрали кучу кокосовых орехов. Дележ отложили на утро. Один из них, проснувшись ночью, угостил одним орехом мартышку, а из остальных орехов взял себе точно пятую часть, после чего лёг спать и быстро уснул. За ночь так же поступили один за другим и остальные моряки; при этом каждый не знал о действиях предшественников. На утро они поделили оставшиеся орехи поровну, но для мартышки в этот раз лишнего ореха не осталось. Каким могло быть наименьшее число орехов в собранной куче?

45. Пётр родился в XIX веке, а его брат Павел — в XX веке. Однажды братья встретились на праздновании своего общего дня рождения. Пётр сказал: «Мой возраст равен сумме цифр года моего рождения». «Мой тоже», — ответил Павел. На сколько лет Павел младше Петра?

46. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя а) ровно в шесть раз; б) ровно в пять раз?

47. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 2000?

ОТВЕТЫ

1. Например: 1 1 2 1 2 2 3 3 1 3 (и замыкаем круг). **2.** а) – в) будет; г) не всегда.. **3.** 10 или 52. **4.** 175 : 5 = 35. **5.** Да (69999 и 70000). **6.** Николай. **7.** $4 + 7a = 4(a + 1) + 3a$. **8.** 3 ореха. **9.** Подсказка: $65(a + b) = 65a + 65b = 65a + 56a = = 121a$.. **10.** 9870. **11.** 21. **12.** 2. **13.** Не может. Указание: посмотрите, с каким количеством других мышек каждая мышка отправляется на склад.. **14.** Арлекин — 1 пирожок, Буратино — 3, Пьеро — 11, Артемон — 13 пирожков.. **15.** Да. Например 20162016 . . . 2016 (224 раза). **16.** $a + b = = (2 + a) - (35 - b) + 33$. **17.** а) 1; б) 1. **18.** 7. **19.** 9; 1; 2; 6. **20.** 19 кг. **21.** Решил. **22.** Подсказка: воспользуйтесь свойствами сравнения о модулю. **23.** Указание: переберите остатки от деления n на 3. **24.** 3. **25.** Указание: воспользуйтесь периодичностью (повторяемостью) остатков. **26.** 6 фертингов; подсказка: остаток от деления 1, 15 и 50 на 7 равен 1. **27.** Подсказка: докажите, что $a \overset{6}{\equiv} a^3$. **28.** Подсказка: возможные остатки квадратов от деления на 9 — 0, 1, 4, 7. Проверьте, что если сумма трех из них делится на 9, то среди них есть два одинаковых. **29.** $2 \cdot 5 \cdot 5 \cdot 73$. **30.** Опечатка. Указание: рассмотрите последнюю цифру числа. **31.** Указание: рассмотрите возможные остатки от деления n на 6. **32.** 2. **33.** 3. **34.** 5. **35.** а) 5, 11, 17, 23, 29; б) 7, 37, 67, 97, 127, 157.. **36.** Нет. **37.** 3 и 2. **38.** Указание: докажите, что оно делится на 2, но не делится на 4. **39.** 2. **40.** 22. **41.** Указание: воспользуйтесь алгоритмом Евклида. **42.** Указание: посчитайте количество закрашенных клеток двумя способами. **43.** 24 или 30. **46.** а) да; б) нет. **47.** 32.

Содержание

Учебное издание

Основы теории чисел.

Методические указания

Составители **Богомолов** Юрий Викторович
Преображенский Игорь Евгеньевич

Компьютерный набор и верстка: Ю.В. Богомолов,
И.Е. Преображенский

Подписано в печать . .2015. Формат 60x84/16.
Бумага тип.
Усл. печ. л. 2,0. Уч.-изд. л. 2,0. Тираж экз. Заказ