Ярославский региональный
инновационно-образовательный центр «Новая школа»

ЛОГИКА

Методические указания

Ярославль, 2013

УДК 510.633,
ББК 22.1
Б 74

Составители: Ю.В. Богомолов, И.Е. Преображенский

Логика. Методические указания. / Сост.: Ю.В. Богомолов, И.Е. Преображенский; — Ярославль, 2013.–54 с.

В методических указаниях основное внимание уделено вопросам изучения темы «Логика» с учащимися общеобразовательной школы в системе дополнительного математического образования. Обсуждаются общие вопросы организации взаимодействия учащихся с педагогом в рамках математического кружка, подробно разбираются различные подходы к решению логических задач, отмечаются возможные трудности, возникающие при изучении данной темы, и способы их преодоления. Предлагаемые методы решения задач иллюстрируются подробно разобранными примерами различной сложности, дополняются упражнениями и задачами для самостоятельного решения.

Методические указания предназначены для педагогов, осуществляющих обучение школьников 5–6 класса (программа первого года обучения) в рамках математических объединений, а также могут представлять интерес для широкого круга педагогов, занимающихся дополнительным математическим образованием школьников.

УДК 510.633
ББК 22.1

1 Введение

Одной из первых тем дополнительных занятий по математике является «Логика». Особенностью этой темы является то, что несложные логические задачи доступны для решения и обсуждения с детьми практически любого начального уровня. Для того, чтобы быть вклченным в занятие, школьнику порой вовсе не требуется даже знать материал 1–4 класса, а сюжетность некоторых задач, определенная свобода в выборе путей решения, возможность предложить несколько правильных ответов и некоторые другие особенности данной темы способны заинтересовать даже таких детей, которым математика всегда казалась скучным предметом, состоящим из выполнения однообразных действий.

Не будет большим преувеличением сказать, что математика у детей после начальной школы ассоциируется в основном со словом «считать». Это вполне объяснимо: сначала школьники изучают цифры, затем выполняют простые арифметические действия с числами, учатся выполнять эти действия в столбик, изучают дроби и операции над ними, и так далее. К старшим классам подобное упрощенное отношение к предмету математики в целом сохраняется, поэтому встречая математические задачи, в которых явным образом особо не требуется вычислять, не нужно решать уравнений, не предлагается рассмотреть что-то связанное с геометрическими объектами, школьники (а порой и учителя) часто говорят: «Это логическая задача». Конечно, здесь содержится и истина, и ложь (об истинных и ложных высказываниях мы более подробно поговорим позже). С одной стороны, современная математика содержит огромное число разделов и областей, причем алгеброй, геометрией и вот теперь ещё и логикой математика далеко не исчерпывается. В то же время, в решении математических задач требуется так или иначе из одних верных утверждений (из условия задачи) получать другие верные утверждения, а для этого пусть даже неявно, но используются правила логического вывода, поэтому очень многие или даже все задачи по математике являются в какой-то степени логическими задачами.

Когда говорят о логических задачах, то обычно подразумевают, что для их решения не требуется знаний привычной «школьной математики», а вполне достаточно наличия здравого смысла, способности делать предположения и аккуратно перебирать возможные варианты. Иными словами, не нужно уметь хорошо и быстро считать, зато нужно «развитое логическое мышление», умение строить верные умозаключения на основе предложенных высказываний. Конечно, построение таких умозаключений подчиняется определенным правилам: одни переходы от верных высказываний к другим утверждениям кажутся обоснованными и логичными, а другие — абсурдными и нелогичными. Поэтому в первую очередь нас будут интересовать общие способы получать из одних истинных утверждений (высказываний, предложений) другие истинные утверждения.

Эти правила логического вывода или, как еще говорят, *нормы правильных умозаключений* сформированы хотя бы на «бытовом уровне» у любого школьника, закончившего начальные классы. Конечно, эти правила можно более строго сформулировать (описать *алгебру логики*), но такой задачи пока нет. Сейчас более важно на простых примерах разобрать основные понятия математической логики, показать различные способы, приёмы и методы решения логических задач (например, метод предположений и метод доказательства от противного, а также полный перебор вариантов), заметить вместе со школьниками логические ошибки (и даже дать возможность самим школьникам сделать эти ошибки) и подумать, как избежать этих ошибок в рассуждениях.

Всё это удобно делать не на основе каких-то общих рассуждений, а в ходе решения и обсуждения задач. Поэтому мы предложим большое количество разобранных примеров (и будем стараться предложить несколько идей решения) и задач для самостоятельного решения. В ходе занятий очень важно сейчас «не перетянуть одеяло на себя»: решения тех задач, которые будут подробно разобраны, не требуется сразу же предлагать школьникам в готовом виде — намного продуктивнее, если школьники для начала осмыслят условие задачи, возможно «сгоряча» предложат совершенно неверное рассуждение или неполный ответ, просто попробуют порассуждать самостоятельно. Обязательно нужно учесть, что одна задача может иметь огромное количество принципиально разных решений и подходов к решению, причем таких, о которых мы даже не догадывались. По этой причине следует особо внимательно следить за возможными «нестандартными» рассуждениями и решениями (при этом обязательно отмечать и поощрять их авторов).

Некоторые задачи допускают неограниченно много вариантов ответов или решений (например, задачи типа «Приведите пример...» или «Придумайте такое утверждение, что...») — в этом случае обязательно нужно дать возможность всем школьникам предложить свой вариант или даже несколько. Ошибки в рассуждениях в каких-то ситуациях тоже можно обсудить вместе со всеми (хотя здесь надо быть предельно осторожным, так как многие дети в самом «начале большого пути» очень чувствительны к собственным маленьким неудачам, а уж тем более если их вынести на всеобщее обозрение, поэтому в следующий раз могут вообще ничего не рассказать — ни правильного решения, ни неправильного). При разборе задачи полезно иногда останавливаться и предложить высказать возможные варианты продолжения решения. Даже после того, как задача решена, можно предложить обсудить и другие варианты решения (совсем хорошо, если эти другие варианты будут исходить именно от школьников), сравнить их, попытаться найти какую-то полезную или просто интересную идею (в том числе в неправильном решении). В любом случае, крайне важная задача при изучении темы «Логика» — это дать школьникам возможность решать задачи максимально свободно и самостоятельно, и при этом максимально свободно высказывать свои идеи.

Предложенный набор задач и примеров, безусловно, не нужно рассматривать как жестко установленный набор упражнений, которые необходимо обязательно выполнить за занятие (или за несколько занятий, отведенных на данную тему). Обсудить разные идеи решения задачи, «поиграть» с условием, переформулировать её, сравнить с другими задачами — всё это значительно более важно, нежели «вместе разобрать пять задач на занятии и три задачи решить самостоятельно». В конце концов, неразобранные задачи всегда можно предложить заинтересованным школьникам в качестве приятного дополнения на дом (не настаивая на обязательности его выполнения).

2 Истинные и ложные высказывания

Математическая логика — одна фундаментальных областей математики. Мы коснемся только одного элементарного раздела этой области — алгебры высказываний (алгебры логики). Конечно, школьникам лучше этого не говорить: во-первых, от знания точного термина умения рассуждать у них не прибавится, во-вторых, лишний раз пугать какими-то громкими названиями скорее опасно. Пусть эта тема запомнится им просто приятными логическими задачами, интересными вопросами и неожиданными ответами.

Что же является основным вопросом этого раздела? Уже из названия понятно, что речь пойдет о высказываниях и операциях над ними. Иными словами, мы посмотрим, как с помощью логических связок из одних высказываний (условно можно их назвать *простыми высказываниями*) образуются новые, *сложные высказывания*. Именно здесь возникает первая особенность: с помощью этих связок могут получаться совершенно бессмысленные конструкции, но допустимые в алгебре высказываний. Например, такое выражение: «Земля вращается вокруг Солнца, а Коля получил двойку за контрольную работу,» — вполне приемлемо с точки зрения алгебры высказываний (два простых утверждения объединили в одно), но воспринимается как «в огороде бузина, а в Киеве дядька».

Пример 1. *Все черные коты — невезучие. Коту Барсику ужасно не везет. Следует ли отсюда, что Барсик — черный кот?*

▼ Это важнейший пример. Дети зачастую не понимают, что если из утверждения А, следует утверждение Б, то обратное не всегда верно. К данной ошибке стоит возвращать в течении всего курса(на разных занятиях), предлагая школьникам различные примеры. Не стоит сразу напирать на формальную сторону вопроса. Обращение с логическими операциями должно стать для ребёнка естественным. Для этого он должен разобрать несколько типичных ситуаций и понять, что если он будет торопиться и

пренебрегать рассуждениями, то придёт к неправильному ответу.

Ученик: Да, тут же написано, что чёрным котам не везет, значит Барсик чёрный кот!

Учитель: А пусть Барсик, например, белый кот. Могло ему не повезти?

Ученик: Ну в принципе могло.

Учитель: Видишь, значит он мог и не быть чёрным!

▲

Пример 2. *Если ученик много занимается, то он успешно сдаёт экзамены. Ученик получил на экзамене двойку. Означает ли это, что он мало занимался?*

▼ Этот пример очень похож на предыдущий, но кардинально от него отличается.

Ученик: О! Этот пример такой же как предыдущий. Не обязательно!

Учитель: Будь внимательнее! Ты утверждаешь, что возможна ситуация, когда ученик много занимался, но получил двойку!

Ученик: Действительно, я ошибся. А вдруг хороший ученик действительно получит двойку? Такое же в жизни возможно?

Учитель: Возможно, но мы разбираем конкретную ситуацию, про которую мы знаем, что она описана в условии задачи. Если бы мы разбирали другую ситуацию, то и условие задачи бы формулировалось по другому.

▲

Предыдущий пример иллюстрирует достаточно типичную проблему при решении сюжетных задач: школьникам очень нелегко абстрагироваться, отключиться от неформальных «жизненных» логических посылок и установок и делать выводы только из условия задачи. Например, как в рассмотренной выше ситуации: может ли тот, кто много занимается, получить двойку? Вполне. Не исключено, что школьники и сами с этим иногда сталкивались, а теперь могут попытаться перенести эти установки и «жизненный опыт» в решение задачи, дополняя условие пунктами, о которых в условии задачи не говорится. Тяжело отвлечься от всего окружающего мира, оставив только условие задачи. Но этой теме, да и вообще в математике, это придется периодически делать.

Иногда условие задачи также может содержать достаточно непривычные логические конструкции (возможно даже такие, с которыми в «обычной жизни» редко удается столкнуться). Тем не менее, в качестве средства развития навыков построения четких логических умозаключений анализ этих конструкций оказывается весьма полезен.

Пример 3. *Неверно, что все друзья моего друга — мои друзья. Что тогда верно?*

▼ Формулировка этой задачи необычна для детей. Уже в самом условии содержится отрицание. Даже выслушав правильные решения, стоит в конце разобрать эту задачу.

Учитель: Давайте переформулируем условие в более привычном виде. Что означает фраза: «Неверно, что все друзья моего друга — мои друзья.» Для простоты будем называть друга Васей.

Ученик: Это означает, что я не дружу ни с кем из друзей Васи.

Учитель: Нет. Допустим у Васи два друга. С одним вы дружите, а с другим нет. Такое возможно?

Ученик: Да возможно.

Учитель: Таким образом мы получаем, что верно утверждение: «Среди друзей Васи есть человек, с которым я не дружу.»

▲

Наиболее важным вопросом, который постоянно возникает и будет возникать при решении логических задач, является вопрос об *истинности* или *ложности* высказывания. Это накладывает определенные ограничения на те утверждения, с которыми нам предстоит иметь дело: в логических задачах будет рассматриваться только такие высказывания, про которые однозначно можно сказать, истинны они или ложны. Например, если попросить мальчика Вову задумать число, то утверждение «Вова задумал число 5» является или истинным (если он и правда задумал число 5), или ложным (если он задумал что-то другое) — оно не может быть «почти правдой» или «в какой-то степени неверным». С другой стороны, про высказывание «Дима является высоким человеком» нельзя сказать, истинно оно или нет, — хотя бы потому, что нет строгого определения, какого человека считать высоким, а какого — нет.

В повседневной жизни мы очень часто сталкиваемся именно

с такими неоднозначными ситуациями (с которыми математическая логика не работает), поэтому в логических часто придется идти на упрощения и допускать некоторые условности. Например, будем рассматривать категорию «рыцарей», подразумевая под ними таких людей, которые *всегда* говорят правду (то есть, любое их высказывание автоматически считается истинным) и категорию «лжецов», которые *всегда* лгут (любое их высказывание ложно).

> *Иногда школьникам придётся это напоминать. В жизни не бывает такого, что человек всегда говорит только правду и ничего кроме правды, как невозможна и полностью противоположная ситуация. По этой причине школьники могут воспринимать утверждение «Такой-то человек — лжец» не так категорично, как это принято в логических задачах.*

В обратную сторону эту особенность тоже можно использовать. Если каждый человек является обязательно рыцарем или лжецом, то по истинности сказанной им фразы можно сразу сделать вывод, кто перед нами, а также выяснить, правдивы ли остальные его высказывания. Например, если человек в каком-то высказывании сказал неправду, то он лжец, и при этом все остальные его высказывания тоже ложны.

Пример 4. *На острове рыцарей и лжецов нам встретился один островитянин. Какой вопрос можно ему задать, чтобы сразу стало понятно, рыцарь он или лжец?*

▼ Конечно, в этом случае имеет смысл задать вопрос, на который мы уже знаем ответ, — тогда можно сравнить ответ островитянина с правильным и сделать вывод, сказал он правду или солгал. Школьники вполне могут предложить указать на предмет какого-то цвета и спросить, например: «Какого цвета у меня ботинки?» Здесь, конечно же, не нужно их сразу ограничивать — если у каждого участника кружка будет свой вариант вопроса, то это просто замечательно, и появляется отличная возможность дать всем выговориться. После этого уже можно ввести ограничение, которое часто будет встречаться в логических задачах:

— А теперь давайте договоримся, что островитянину можно задать такой вопрос, на который был бы возможен только один из двух вариантов ответа – да или нет.

Это ограничение достаточно мягкое, поэтому опять же школьникам можно предложить придумать много таких вопросов. Вариантов и правда может быть много:
— Рыцари всегда говорят правду?
— Мы находимся на острове?
— Мои ботинки черные?
...и много, много других.

▲

Пример 5. *На острове рыцарей и лжецов нам встретился один островитянин. Будем считать, что на вопросы островитяне дают ответ «да» или «нет». Какой вопрос можно ему задать, чтобы получить ответ «да»?*

▼ Этот случай, как может показаться, немного потруднее — ведь рыцари и лжецы по-разному отвечают на вопросы (рыцари отвечают правду, а лжецы всегда лгут). Поэтому здесь удачным ходом является упоминание в вопросе самого человека, которому этот вопрос задается — тогда рыцаря мы будем спрашивать про рыцаря, а лжеца — про лжеца (то есть, рыцарям и лжецам мы будем задавать, фактически, вопросы про разных людей, а на разные вопросы они вполне могут ответить одинаково). Например, вполне годится такой вопрос: «Ты рыцарь?» — на него и рыцарь ответит «да» (потому что это правда), и лжец тоже ответит «да» (потому что должен сказать неправду, а правдой был бы как раз ответ «нет»).

Естественно, здесь лучше дать возможность детям предложить свои варианты вопросов. Неподходящие вопросы тоже полезны — вместе со школьниками можно разобрать, почему они не подходят. Для этого достаточно спросить, что ответит на этот вопрос рыцарь, а что ответит лжец (кстати, подходящие вопросы следует разобрать таким же образом, чтобы убедиться, что они действительно подходят под условие задачи).

▲

Упражнение 1. *А теперь подумайте, какой вопрос нужно задать островитянину, чтобы обязательно получить ответ «нет»?*

Упражнение 2. *Островитянин Труляля всегда говорит правду, а островитянин Тралаля — всегда лжет. Какой вопрос надо было бы им задать, чтобы они дали на него одинаковые ответы?*

Упражнение 3. *Островитянин Труляля всегда говорит правду, но когда ему задали дважды один и тот же вопрос, он дал на него разные ответы. Какой бы это мог быть вопрос?*

Для преподавателя. В предыдущей разобранной задаче был использован интересный приём. Можно сказать, что некоторое утверждение «пропускалось» через человека и либо оставалось неизменным, либо менялось на противоположное. Условно это можно описать так: пусть есть высказывание A (например, в рассмотренной задаче высказывание A можно было бы сформулировать так: A=«Ты рыцарь»). Тогда если рыцарю задать вопрос: «Верно ли утверждение A?» — то если A было истинным, то рыцарь это подтвердит, а если ложным, то такую информацию мы и получим от рыцаря. Напротив, если задать вопрос: «Верно ли утверждение A?» — лжецу, то вместо верной информации об утверждении A мы получим полностью противоположную.

Тогда можно сказать, что рыцарь — это тот, кто оставляет истинность высказываний без изменений, а лжец — это тот, кто меняет её на противоположную. Раз так, то можно пойти дальше и подумать над таким вопросом: а что будет, если какое-то утверждение «пропустить» через двух рыцарей или через двух лжецов? А если через одного рыцаря и одного лжеца? Попробуем это применить в такой задаче.

Пример 6. *Нам встретились два островитянина. Мы знаем, что одного из них зовут Дима, а другого — Вова. Также нам известно, что один из этих островитян говорит правду, а другой всегда лжёт. Нужно задать одному из них один вопрос, чтобы выяснить, как его зовут. Как это сделать?*

▼ На первый взгляд, одним вопросом не обойтись — если у островитянина спросить про имя, то, получив от него ответ, мы не можем сказать, верный он или нет. Действительно, мы не знаем, говорит этот островитянин правду или же лжёт. Поэтому может показаться, что обязательно нужен еще один вопрос, чтобы определить, лжец перед нами или рыцарь. Иначе говоря, в задаче есть сразу две неопределенности: 1) мы задаем вопрос рыцарю или лжецу; 2) мы задаем вопрос Диме или Вове. Таким образом, есть четыре варианта, кому мы задаем вопрос: 1) рыцарю Диме; 2) рыцарю Вове; 3) лжецу Диме; 4) лжецу Вове. А для того, чтобы избавиться из четырех вариантов выбрать один, единственного вопроса не хватит.

Но этого и не нужно! Нам ведь не нужно знать, кто перед нами – лжец или рыцарь. Нам не нужно и знать, говорит Дима правду или нет. Требуется лишь выяснить имя собеседника. То есть, информация о том, кто рыцарь, а кто лжец, нам по условию задачи не нужна, и тратить на нее лишний вопрос пока что необязательно. Но как тогда убедиться в правильности полученного ответа, если мы не знаем, честно нам ответили или солгали?

А для этого мы применим ту идею, о которой упоминали выше, – «пропустим» какое-нибудь утверждение через одного рыцаря и одного лжеца (перед нами как раз и есть два таких островитянина). Тогда после рыцаря истинность высказывания останется неизменной, а лжец изменит истинное высказывание на ложное или ложное изменит на истинное. Итак, если утверждение (высказывание) «прошло» через рыцаря и лжеца, то оно станет истинным, если было ложным, и станет ложным, если было истинным, – то есть, изменит свою истинность на противоположную. Осталось придумать, как это сделать одним вопросом.

Для этого придется в вопрос к одному из островитян включить и косвенное обращение к другому островитянину. Например, вопрос может быть таким: «Если я спрошу другого островитянина, зовут ли того Димой, то что он мне ответит?» Рассмотрим четыре перечисленных выше варианта:
1) Вопрос был задан рыцарю Диме. Дима понимает, что если второго островитянина спросить, зовут ли того Димой, то этот второй островитянин — не Дима, вдобавок он лжец. То есть, второй островитянин соврёт и ответит «да». То есть, Дима понимает, что второй островитянин ответит «да», и именно этот ответ честно передаст нам.
2) Вопрос был задан рыцарю Вове. Вова понимает, что если второго островитянина спросить, зовут ли того Димой, то этот второй островитянин — Дима, но лжец, и поэтому соврёт. Вова сразу понимает, что Дима ответит «нет», и именно этот ответ честно передаст нам (ведь сам он рыцарь).
3) Вопрос был задан лжецу Диме. Дима знает, что второй островитянин — рыцарь Вова, который даст ответ «нет» на вопрос, является ли он Димой. Но сам Дима — лжец, поэтому нам он передаст противоположный ответ — «да».
4) Вопрос был задан лжецу Вове. Вова тоже знает, что второй — рыцарь Дима, который скажет «да» на вопрос, является ли он Димой. Но Вова — лжец — и нам он передаст ответ «нет».

В первую очередь заметим, что ответ «да» от первого островитянина будет получен только в том случае, если этот мальчик — Дима (соответственно, второй островитянин — Вова), а иначе будет получен ответ «нет». Поэтому этот вопрос позволяет узнать имя каждого из островитян, что и требовалось. А еще можно заметить, что после ответа на этот вопрос мы так и не можем сказать, кто из островитян говорит правду, но этого по условию задачи и не требовалось.

Для преподавателя. Задача и правда для школьников достаточно непростая, поэтому не следует ожидать, что тут же будет получен верный ответ. Может получиться так, что у участников кружка не будет даже высказанных версий (но если версия вопроса предлагается, то нужно аккуратно разобрать — для каждого из четырех случаев — позволяет ли этот вопрос определить имя островитянина). Допустимо порассуждать над более простыми задачами. Например, «А какой бы вопрос мы задали островитянину, если бы знали, что он лжёт?» или «Какой вопрос можно было бы задать островитянину, если известно, что Дима всегда говорит правду, а Вова всегда лжёт?» Если после более простых задач у школьников не созреет вопрос на исходную задачу, то лучше всего предложить подумать над ней дома (а на следующем занятии разобрать).

▲

В дальнейшем мы рассмотрим примеры задач, для решения которых удобно использовать некоторые операции над высказываниями и свойства этих операций. В особенности это относится к задачам со многочисленными «вложенными отрицаниями».

Наличие двух противоположных ответов или ситуаций (да или нет, рыцарь или лжец) позволяет «играть на противоречиях»: когда предположение приводит к нестыковкам с условием задачи, то это означает, что предположение неверно и нужно рассмотреть противоположный вариант. Заметим, что такое небольшое количество вариантов («истина» или «ложь») иногда дает возможность перебрать все комбинации истинности и ложности высказываний, выбрав из них те, которые не противоречат условию. Разберём это на простом примере.

Пример 7. *На заседании по делу об украденной муке Мартовский Заяц заявил, что вор —- Болванщик. Болванщик и Соня тоже дали показания, которые, однако, не были записаны. Позже выяснилось, что муку украл лишь один из троих, и лишь он дал правдивые показания. Кто украл муку?*

▼

Обычно ребенок, который впервые сталкивается с этой задачей спрашивает: «А не пропущено ли что-то в условии?» Затем он пытается угадать ответ. Это-то нам и нужно. Приведем пример диалога.

Школьник: Я думаю вор — Мартовский Заяц.

Учитель: Почему ты решил, что вор именно он?

Школьник: Я не знаю, мне так кажется.

Учитель: Давай посмотрим, на высказывание Мартовского зайца, ведь нам известно, что только вор сказал правду и вор был только один.

Школьник: Точно! Ведь если Мартовский Заяц сказал правду, то вор Болванщик и тогда воров двое, а такого не может быть.

В данной ситуации мы «случайно» подсказали, оставив ребенку возможность сделать логический шаг самостоятельно. Таким образом мы исключили из рассмотрения Мартовского Зайца и можем приступить к обсуждению следующей кандидатуры.

Учитель: А теперь подумай мог ли вором оказаться Болванщик.

Школьник: Нет ведь тогда, Заяц сказал правду, но мы знаем что правду сказал, только вор. Остался Соня, значит он вор.

Ещё раз обратим внимание, что в данной ситуации мы лишь подсказываем ребенку схему рассуждения (перебор кандидатов), но ни в коем случае не делаем за него шаги.

▲

Пример 8. *Сидят мальчик и девочка. «Я — мальчик», — сказал первый ребёнок. «Я — девочка», — говорит второй ребёнок. Известно, что хотя бы один из этих двух детей врёт. Кто из них мальчик, а кто девочка?*

▼ При разборе этой задачи допустимо предоставить школьникам возможность угадать правильный ответ. Если вариант ответа будет неверным, то полезно обсудить, какой именно части условия это противоречит. К примеру, если предложен вариант «Первый — мальчик, второй — тоже мальчик», то есть два варианта:
1) явно указать на то, что в условии задачи сказано «Сидят мальчик и девочка», поэтому оба мальчиками быть не могут;
2) намекнуть на то, что под условие задачи это подходит (при этом условие задачи можно и напомнить) и предложить самим найти, почему этот вариант ответа не подходит под условие задачи.

После неверного ответа, естественно, следует дать возможность подумать ещё, выслушать другой ответ и обсудить уже его.

Если предложен верный ответ («Первый — девочка, а второй — мальчик»), то в первую очередь следует вместе со всеми аккуратно убедиться в том, что он полностью удовлетворяет условию задачи. Прямо по пунктам условия:

Учитель: Правда ли, что сидят мальчик и девочка?

Ученик: Да.

Учитель: Первый ребенок сказал правду или неправду?

Ученик: Неправду, потому что он девочка, а сказал, что мальчик.

Учитель: Второй ребенок сказал правду или неправду?

Ученик: Тоже неправду — он мальчик, а сказал, что девочка.

Учитель: Тогда верно ли, что хотя бы один из них врёт?

Ученик: Верно. Они даже оба врут!

Учитель: Всё сходится с условием?

Ученик: Всё сходится.

Учитель: Значит, задача решена?

Ученик: Решена.

(Хотя в последнем вопросе дети вполне могут заподозрить какой-то подвох — но это даже к лучшему.)

Почти наверняка дети после обнаружения правильного ответа посчитают, что задача решена. В самом деле, ответ получен, с условием сходится, — чего ж ещё нужно? Здесь обязательно нужно обратить внимание на то, что для того, чтобы считать задачу решенной, нужно или перебрать все возможности, или как-то иначе доказать, что других вариантов быть не может:

Учитель: Вот мы рассмотрели один пример. Он подходит. А вдруг подходит еще какой-то ответ?

Ученик: Нет, других ответов нет.

Учитель: Почему?

Ученик: Потому что другие варианты не подходят, а этот подходит.

Учитель: Для того, чтобы показать, что другие варианты не подходят, нам нужно все их перебрать. Мы ведь этого не сделали, правда?

Ученик: Но ведь мы нашли правильный ответ!

Учитель: Верно. Но в задаче может быть несколько правильных ответов — разные ответы, и каждый из них подходит. (Примечание: здесь даже возможно отвлечься от этой задачи и рассмотреть пример другой задачи, в которой правильных ответов несколько.) Поэтому давайте аккуратно переберём все остальные варианты и убедимся, что они не подходят — тогда мы сможем сказать, что только найденный нами ответ является единственным верным.

К этой задаче, если школьники не смогли четко перебрать все варианты, мы вернемся в следующих разделах (когда будем более подробно говорить о переборе вариантов и использовании предположений).

▲

Задачи

1. Колина мама сказала: «Все чемпионы хорошо учатся». «Я хорошо учусь. Значит, я — чемпион», — говорит Коля. Прав ли он?

2. Никто не может квакать на болоте, если он не лягушка. Все лягушки зелёные. Некоторые обитатели леса любят квакать на болоте по утрам. Какой вывод можно сделать из этой информации?

3. Учитель сказал: «Кто закончит четверть без троек — поедет на экскурсию». Костя получил за четверть две тройки — по рисованию и пению. Означает ли это, что Костю на экскурсию не возьмут?

4. Шерлок Холмс курит только перед очередным расследованием. Во время расследования он всегда играет на скрипке. Если Шерлок Холмс курит, следует ли, что он будет играть на скрипке?

5. На чемпионате Европы по футболу ни одна сильная команда не смогла выиграть у сборной Греции. Сборная России победила сборную Греции. Означает ли это, что сборная России — сильная команда?

6. О жителях Трапезундии известно следующее: 1) некоторые из них умеют писать красиво. 2) Ни у одного поэта нет красивого почерка. 3) Все боксёры пишут стихи. Посетивший Трапезундию барон Мюнхгаузен утверждает, что все её жители либо боксёры, либо поэты. Верите ли вы ему?

7. Во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и носороги, нет жирафов. В каждом зоопарке есть хотя бы один носорог или гиппопотам. Наконец, во всех зоопарках, где есть гиппопотамы и жирафы, есть и носороги. Известно, что в Вишкильском зоопарке есть жираф. Есть ли там: а) носорог; б) гиппопотам?

8. Коля Васин задумал число: 1, 2 или 3. Вы задаете ему только один вопрос, на который он может ответить «да>, «нет» или «не знаю». Сможете ли вы угадать число, задав всего лишь один вопрос?

9. Абориген Тим в присутствии другого аборигена Тома заявил: «По крайней мере один из нас — лжец». Кто же они?

10. Вам встретились два аборигена Там и Тум. Там сказал: «По крайней мере один из нас рыцарь», а Тум заявил: «Тот, кто стоит рядом со мной — лжец». Кто они?

11. Встретились несколько аборигенов, и каждый из них заявил всем остальным: «Вы все — лжецы». Сколько рыцарей могло быть среди этих аборигенов?

12. На острове живут рыцари, которые всегда говорят правду, и лжецы, которые всегда лгут. Путник встретил троих островитян и спросил каждого из них: «Сколько рыцарей среди твоих спутников?». Первый ответил: «Ни одного». Второй сказал: «Один». Что сказал третий?

3 Перебор вариантов

Одним из эффективных способов решения логических задач является полный перебор вариантов. Полный перебор в задачах (где он возможен) зачастую дает полное решение. В самом деле, если мы рассмотрели абсолютно все случаи и отбросили те, которые противоречат условию задачи, то остались только подходящие (с точки зрения соответствия условию) варианты, что обычно и составляет ответ в задаче. Затрудняет использование полного перебора то обстоятельство, что количество вариантов может быть очень большим, поэтому аккуратная проверка каждого из них потребует много времени и внимания. Поэтому вдумчивый анализ условия задачи с выделением заведомо подходящих и заведомо неподходящих случаев может сильно сократить количество вариантов даже в переборном решении.

На полноту перебора постоянно придется обращать внимание школьников. Надо аккуратно, но настойчиво внушать мысль о том, что просто ответ (пусть и с обоснованием, почему он подходит) — это не решение, потому что вполне возможно несколько вариантов правильного ответа, и все эти варианты нужно разобрать. Неполный перебор, даже если пропущен только один случай, — это тоже не решение, потому что именно пропущенные случаи могут нам дать новые подходящие ответы. Рассмотрим несколько примеров.

Пример 9. *В субботу и воскресенье Вова говорит только правду, а в остальные дни говорит только неправду. Однажды Вова сказал: «Вчера была не пятница». В какой день он мог такое сказать? Найдите все возможные ответы.*

▼ Возможен диалог в таком ключе:

Ученик: Он мог это сказать в воскресенье.

Учитель: Почему?

Ученик: Потому что в воскресенье он говорит правду, и в воскресенье можно сказать, что вчера была не пятница.

Учитель: Верно. Этот вариант подходит, и было очень хорошо объясненно, почему он подходит. Но вдруг подходят еще какие-то варианты?

Ученик: Но ведь требовалось узнать, в какой день он мог это сказать. Вот в воскресенье он это и правда мог сказать.

Учитель: Да, но также требовалось найти все возможные ответы. Вдруг есть еще какие-то подходящие варианты?

Ученик: Нет, других вариантов быть не может.

Учитель: Это нужно обосновать. Почему он не мог, например, такого сказать в понедельник?

Ученик: Потому что для понедельника вчера была и правда не пятница, а в понедельник Вова должен говорить неправду. Он не может сказать правду в понедельник.

Учитель: Очень хорошо! Мы разобрались с воскресеньем и понедельником. Теперь нужно точно так же разобрать и все оставшиеся дни недели.

Здесь мы подталкиваем школьника к необходимости полного перебора и даже можем вместе с ним проделать несколько шагов (в стиле «теперь разбери этот случай», «а теперь разбери следующий вариант» и так далее). После нескольких совместно разобранных вариантов школьники начинают разбирать случаи самостоятельно, и задачей учителя будет только следить за тем, чтобы школьники этот перебор не бросили на полпути.

Конечно, от школьников не всегда требуется для каждого рассматриваемого варианта произносить одни и те же слова. После пары разобранных примеров школьники поймут, что говорят одно и то же, поэтому и сами, без какого-то приглашения, постараются объединить несколько вариантов в один. Например, могло быть такое сжатое решение: для любого буднего дня вчерашний день — это не пятница. Поэтому в будни Вова такого сказать не мог (по будням он врет). В субботу он тоже такого сказать не мог (иначе б соврал, а в субботу он этого не делает). А вот воскресенье подходит.

▲

Следующий пример является достаточно полезным как задача, в которой возможно несколько правильных ответов. Соответственно, на данный пример можно ссылаться как на иллюстрацию потенциальной возможности потерять ответы в случае неполного перебора.

Пример 10. *В субботу и воскресенье Вова говорит только правду, а в остальные дни говорит только неправду. Однажды Вова сказал: «Вчера была среда». Потом он добавил: «А завтра будет вторник». Наконец, подумал и добавил: «А вот послезавтра будет четверг». В какой день это могло происходить? Найдите все возможные ответы.*

▼ В субботу и воскресенье он этого говорить не мог (иначе он должен сказать правду, но фраза «Вчера была среда» в субботу и воскресенье правдой быть не может). Значит, говорил он это в будний день и поэтому три раза сказал неправду. Фраза «Вчера была среда» — неправда — поэтому сегодня не четверг. «А завтра будет вторник» — тоже неправда — сегодня не понедельник. «Послезавтра будет четверг» — и это неправда — так что сегодня не вторник.

Исключены все варианты, кроме среды и пятницы. В среду и в пятницу все сказанные фразы являются неправдой, поэтому оба этих варианта подходят. Таким образом, в этой задаче два возможных варианта ответа (и школьники должны указать оба).

▲

Пример 11. *Сидят мальчик и девочка. «Я — мальчик», — сказал первый ребёнок. «Я — девочка», — говорит второй ребёнок. Известно, что хотя бы один из этих двух детей врёт. Кто из них мальчик, а кто девочка?*

▼ В предыдущем разделе мы уже сталкивались с этой задачей и обсуждали, что одна из важных проблем при решении — это неполный перебор случаев. На этом примере мы покажем, какие подходы можно использовать для организации перебора.

Первый способ (перебор истинности высказываний). Заметим, что в задаче всего два ребёнка, и для каждого из них возможны два варианта, что он говорит, — правду или ложь. Всего получается четыре варианта, которые мы сейчас и разберём.

1. Оба говорят правду. Но это противоречит условию задачи (сказано, что хотя бы один из них врёт).

2. Оба лгут. Тогда и первый сказал неправду, и второй. Итак, первый соврал, при этом первый сказал: «Я — мальчик», — поэтому на самом деле он является девочкой. Аналогично

соврал второй ребёнок, при этом н сказал: «Я — девочка», — тогда на самом деле (раз врёт) он является мальчиком. Итак, первый — мальчик, второй — девочка, оба врут, – и это подходит под условие задачи.

3. Первый ребёнок говорит правду, а второй лжёт. Первый сказал: «Я — мальчик», — тогда он (раз говорит правду) на самом деле является мальчиком. Второй ребёнок сказал: «Я — девочка», — а так как это ложь, то второй ребёнок тоже является мальчиком. Но тогда мальчиком является и первый ребёнок, и второй, а это противоречит условию (по условию задачи сидят мальчик и девочка, а не два мальчика).

4. Первый ребёнок лжёт, а второй говорит правду. Этот случай аналогичен третьему: получается, что у нас две девочки, а это противоречит условию.

Итак, перебрали все четыре варианта — и только один из них полностью соответствует условию (в трёх оставшихся варианта не выполняется какая-то часть условия задачи). Таким образом, первый ребёнок — девочка, а второй ребёнок — мальчик.

Второй способ (перебор вариантов «мальчик/девочка»). Похожий способ перебора, но основан на том, что у нас есть всего два варианта пола — мальчик или девочка — а тогда тоже можно рассмотреть все четыре случая.

1. Первый и второй — мальчики. Но это противоречит условию задачи (сказано, что сидят мальчик и девочка).

2. Первый и второй — девочки. Но это тоже противоречит условию (сказано, что сидят мальчик и девочка, а не две девочки).

3. Первый ребёнок — мальчик, а второй — девочка. Но тогда первый ребёнок — мальчик, и при этом говорит: «Я — мальчик», — то есть, говорит правду. Аналогично и второй ребёнок — он является девочкой и при этом говорит: «Я — девочка», — то есть, тоже говорит правду. Но тогда правду говорят оба ребёнка, а это противоречит условию задачи (в нём сказано, что хотя бы один из этих двух детей врёт).

4. Первый ребёнок — девочка, а второй — мальчик. Тогда каждый ребёнок соврал (и это не противоречит условию) и при этом у нас есть одна девочка и один мальчик — это тоже полностью соответствует условию. Итак, этот вариант подходит.

Снова из четырёх вариантов подошёл только один: первый ребёнок — девочка, а второй — мальчик.

▲

Пример 12. *Аня, Боря и Вова заспорили. Аня заявила: «Среди нас нет лжецов!» Боря засомневался: «Лжец есть, но только один.» Вова ответил: «Да, лжецы есть, но только не один, а два.» Сколько же лжецов на самом деле?*

▼ Угадать ответ в этой задаче совсем несложно, поэтому вполне возможен такой диалог:

Школьник: Два! Здесь два лжеца — Аня и Боря!

Учитель: Но ведь нужно это обосновать, а не только сказать ответ.

Школьник: Аня и Боря врут, а Вова говорит правду. Тогда Аня и правда сказала неправду — ведь она говорит, что лжецов нет, а на самом деле они есть. Боря тоже лжец, потому что он говорит, что лжец только один, а на самом деле их два (он и Аня). А Вова говорит, что два лжеца, и на самом деле два лжеца (Аня и Боря), поэтому он сказал правду.

Учитель: Хорошо. Этот вариант подходит. Мы решили задачу?

Школьник: Конечно! В задаче спрашивали, сколько лжецов на самом деле, — их два (Аня и Боря).

Учитель: Но ведь ответ нужно обосновать.

Школьник: Я и обосновал. Я же объяснил, почему Аня и Боря врут, а Вова говорит правду.

Учитель: Не совсем. Да, было обоснование, почему этот вариант подходит под условие задачи. Он и правда подходит. Но вдруг есть и другие случаи, которые тоже подходят?

Школьник: Но ведь я показал, что два лжеца — этот вариант подходит.

Здесь как раз нужно аккуратно, но четко пояснить школьникам, что бывают математические задачи, в которых ответов несколько — и все они подходят под условие (а бывают и задачи, где нет подходящего ответа).

Безусловно, в дальнейшем школьники неоднократно будут сталкиваться с примерами таких задач (например, при решении квадратных и некоторых других уравнений, где корней может быть несколько), но сейчас для них это достаточно непривычная ситуация — ведь обычно им приходилось сталкиваться только с заданиями, где проводится цепочка осмысленных рассуждений или вычислений, приводящая в итоге к однозначному ответу. Поэтому полезно периодически сталкивать школьников с ситуациями, когда ответ уже не является однозначным. Это помогает избежать формирования установки на угадывание правильного ответа — в самом деле, если ответ однозначен, то не всё ли равно, как его получить (как-то порассуждать и что-то посчитать или же просто угадать и проверить).

Обсудили, что ответов в задаче теоретически может быть несколько. Теперь нужно явно это продемонстрировать: или школьники самостоятельно разберут оставшиеся случаи (этот вариант был бы наиболее уместным — полезнее подтолкнуть школьников к аккуратному разбору, нежели явно его провести самостоятельно).

Заметим, что предложенная задача допускает несколько разных переборных решений. Во-первых, можно перебрать комбинации «рыцарь/лжец» в этой компании — для каждого из школьников возможны два варианта: или он говорит правду, или он лжёт. Поэтому для трёх школьников этих комбинаций будет восемь («Все говорят правду», «Аня и Боря говорят правду, а Вова лжёт», и так далее), и можно их аккуратно перебрать. Во-вторых, можно отталкиваться от возможных вариантов количества лжецов — их может быть 0, 1, 2 или 3 (всего четыре варианта) — здесь перебор будет попроще.

Наконец, какую-то информацию мы можем достаточно быстро получить из условия. Например, Аня точно не может говорить правду, потому что Боря и Вова противоречат друг другу (и поэтому не могут оба говорить правду). Так что количество комбинаций для перебора сокращается (т.е. можно не рассматривать случаи, когда Аня говорит правду). Можно пойти и дальше — раз Аня, Боря и Вова полностью противоречат друг другу (никакие двое из них не могут быть оба правы), то лжецов из них как минимум два. Таким образом, Аня и Боря сказали неправду, поэтому как минимум они являются лжецами. А дальше возможны два варианта: или Вова говорит правду (тогда лжецов будет два — это тот вариант, который рассмотрен в диалоге), или Вова лжёт (и тогда все трое являются лжецами — это тоже не противоречит условию задачи).

▲

Как мы уже обсудили, ситуация с несколькими подходящими ответами в задаче является для школьников в какой-то степени непривычной. По этой причине в условия задач иногда включается намек или даже явное указание на возможную множественность ответа. Например, в предложенной задаче вопрос мог бы звучать так: «Сколько лжецов могло быть среди них?» Здесь содержится неявный намёк на возможность нескольких подходящих ответов. Дескать, могло быть два лжеца (и мы показали, как это возможно), а могло быть и не два (и надо это отдельно рассматривать). Правда, этот намёк школьники иногда истолковывают несколько иначе: слова «сколько могло быть» воспринимаются как «найдите хотя бы один подходящий пример» (как в приведенном диалоге: ведь и правда могло быть два лжеца). Поэтому вместо намёка в задачах для школьников этого возраста часто даётся более четкое указание — и вопрос задачи превращается в такой: «Сколько же лжецов на самом деле? Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему других нет». В дальнейшем это указание встречается всё реже и реже — по той причине, что школьники привыкают к ситуации возможной множественности ответов в задачах, а необходимость анализа всех возможных комбинаций уже выглядит достаточно естественной (то есть, не из-за того, что вдруг с какого-то момента в математических задачах оказалось ненужным рассматривать все возможные допустимые варианты).

Пример 13. *Один из 3 братьев поставил на скатерть кляксу.*

— Кто запачкал скатерть ? — спросила бабушка.
— Витя не ставил кляксу, — сказал Алеша, — Это сделал Боря.
— Ну а ты что скажешь? — спросила бабушка Борю.
— Это Витя поставил кляксу, — сказал Боря, — А Алеша не пачкал скатерть.
— Так я и знала, что вы друг на друга сваливать будете, — рассердилась бабушка. — Ну а каков твой ответ? - спросила она Витю.
— Не сердись бабуля! Я знаю, что Боря не мог этого сделать. А я сегодня не готовил уроков. — сказал Витя.

Оказалось, что двое мальчиков в каждом из двух своих заявлений сказали правду, а один оба раза сказал неправду. Кто поставил на скатерть кляксу?

▼ Известно, что только один из трех братьев оба раза сказал неправду. Поэтому складывается удобная ситуация для полного перебора вариантов. Проведем этот перебор, рассмотрев все возможные варианты, кто мог солгать.

1 вариант: Алеша сказал неправду (оба раза), а остальные оба раза сказали правду. Раз Алеша заявил о невиновности Вити и при этом солгал, то именно Витя испачкал скатерть (при этом насчет Бори Алеша врет). Боря дважды это подтверждает (и он оба раза прав), фразы Вити тоже этому не противоречат. Так что этот вариант подходит, запомним его.

2 вариант: Боря сказал неправду (оба раза), а остальные оба раза сказали правду. Тогда из ложности его высказываний легко установить, что скатерть испачкал Алеша. Но Алеша говорит правду и заявляет о виновности Бори. Противоречие.

3 вариант: Витя сказал неправду (оба раза), а остальные оба раза сказали правду. Но тогда Алеша и Боря противоречат друг другу (один говорит, что скатерть испачкал Боря, а другой — что это сделал Витя), поэтому оба говорить правду не могут. Снова противоречие.

Итак, кляксу на скатерть поставил Витя.

▲

Пример 14. *У Кролика украли бочонок меда. Кролик подозревает в краже ослика Иа, Винни-Пуха, Тигру и Пятачка, так как неопровержимыми уликами доказано, что*
1. кто–то из них обязательно виновен;

2. никто больше не мог польститься на мед;
3. Пятачок всегда действует только вместе с Винни;
4. если Иа виновен, то у него было ровно два соучастника;
5. если виновен Тигра, то у него был ровно один соучастник.

Чья вина не вызывает сомнения?

▼

Эта задача (как и многие предыдущие) решается перебором случаев, поэтому полного решения мы не приводим. Важной является следующая ошибка.

Ученик: Пятачок и Винни всегда действуют вместе.

Учитель: Это неверно.

Ученик: Ну как же, здесь ведь написано, что Пятачёк всегда действует вместе с Винни.

Учитель: Действительно, но нигде не написано, что Винни всегда действует с Пятачком.

Ответ: Винни.

▲

Пример 15. *Следователь допрашивает трех свидетелей. Клод утверждает, что Жак лжёт, Жак обвиняет во лжи Дика, а Дик уговаривает не верить ни Клоду, ни Жаку. Кто из свидетелей говорит правду?*

▼

Эта задача достаточно сложная. Приведем возможный вариант диалога с учеником. К этому моменту дети уже обычно представляют, что нужно перебирать случаи, но с кого лучше начинать перебор и как его структурировать не понимают. Поэтому нужно внимательно следить не только за ошибками, но и за перебором лишних случаев. Подчеркнем, что перебор лишних случаев и повторный перебор одних и тех же случаев не является ошибкой, позволяющей считать решение не верным. Но в более сложных задачах подобные недочеты могут привести к путанице и, как следствие, к ошибкам. Это стоит особенно подчеркнуть.

Ученик: Пусть Клод говорит правду, тогда Жак лжёт. Если Жак лжёт, то Дик говорит правду. Если Дик говорил правду, то и Клод и Жак лгут. Получается, что Клод и лжёт и говорит правду одновременно. а такого не может быть.

Учитель: Молодец, но это только один случай.

Ученик: Допустим, что Жак говорит правду.

Это достаточно тонкий момент. Возможны 2 варианта:

1. Ребенок просто ошибся и безграмотно осуществляет перебор.

2. Он понял, что раз Клод лжёт, то Жак говорит правду. В этом случае ребенок просто опустил часть рассуждений, вероятно, посчитав их очевидными.

Хочется обратить внимание, что в задачу учителя входит не сверка решения с заранее написанным шаблоном. Основная задача заключается в том, чтобы понять что же имел ввиду ребёнок и постараться скорректировать его рассуждения, в случае если в них содержатся недостатки. Для этого можно использовать дополнительные вопросы. Отметим исходя из своего опыта обсуждения этой задачи с детьми, что гораздо чаще встречается первый вариант. Разберем его более подробно.

Учитель: А почему ты не рассмотрел ситуацию, когда Клод лжёт?

Ученик: Я же делаю перебор и теперь должен перебрать Жака.

Учитель: Нет, ты должен перебрать не всех людей, а все возможные ситуации. Поэтому у нас имеется две ситуации: Клод лжёт и Клод говорит правду.

Ученик: Хорошо, пусть Клод лжёт, тогда Жак говорит правду и значит Дик лжёт. Раз Дик лжёт , то и Клод и Жак лгут, но такого не может быть! Задача не верна!

Это ключевой момент в этой задаче! Неверно построено отрицание.

Учитель: Подожди, давай сначала рассмотрим пример. Пусть есть несколько наборов из двух шариков: красный и синий, синий и зеленый, красный и красный. Пусть какой-нибудь мальчик (например, Вася) сказал: «В коробке лежит набор из двух красных шаров.» В каких из трёх ситуаций он лжёт?

Ученик: В первой и второй.

Учитель: Правильно, но смотри в первой ситуации один из шаров является красным! То есть Вася лжёт даже, если половина его высказывания не верна! Полуправда тоже является ложью. Теперь понятно, где у тебя ошибка? Попробуй применить подобные рассуждения к нашей задаче.

Ученик: Точно! Раз Дик лжёт, Клод лжёт, а Жак говрит правду, то всё сходится! Задача решена.

Таким образом разобрав пример, мы позволили ребенку самостоятельно выполнить логические шаги и применить только, что полученные знания в конкретной(достаточно сложной) ситуации. Отметим также, что это всего лишь один из вариантов диалога, приведённый с целью показать ключевые моменты. На практике авторам неоднократно приходилось выслушивать существенно более запутанные и безграмотно оформленные решения. Ещё раз напомним, что ученики даже решив задачу не всегда могут правильно его изложить. Учитель должен позволить ученику совершить ошибки, не загоняя его заранее в определенные формальные рамки, но достаточно жёстко отсекая явные ошибки.

▲

Задачи

13. Кондратьев, Давыдов и Фёдоров живут на одной улице. Один из них — столяр, другой — маляр, третий — водопроводчик. Недавно маляр хотел попросить своего знакомого столяра сделать кое-что для своей квартиры, но ему сказали, что столяр работает в доме водопроводчика. Известно также, что Федоров никогда не слышал о Давыдове. Кто чем занимается?

14. Перед нами три островитянина A, B и C, о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Двое из них (A и B) высказывают следующие утверждения:
A: Мы все лжецы.
B: Один из нас рыцарь.
Кто из трех островитян A, B и C рыцарь и кто лжец?

15. Предположим, что A и B высказывают следующие утверждения:
A: Мы все лжецы.
B: Ровно один из нас лжец.
Можно ли определить, кто такой B: рыцарь или лжец?
Можно ли определить, кто такой C?

16. Предположим, что А высказывает утверждение: «Я лжец, а В не лжец.» Кто из островитян А и В рыцарь и кто лжец?

17. Перед нами в очередной раз три островитянина А, В и С, о каждом из которых известно, что он либо рыцарь, либо лжец. Условимся называть двух островитян однотипными, если они оба рыцари или оба лжецы. Пусть А и В высказывают следующие утверждения:
А: В - лжец.
В: А и С однотипны.
Кто такой С: рыцарь или лжец?

В следующих четырех задачах рассматривается такая ситуация: на острове живут Лев и Единорог. Это очень странные существа. Лев лжёт по вторникам, средам и четвергам и говорит правду во все остальные дни недели. Единорог же лжёт по четвергам, пятницам и субботам и говорит правду во все остальные дни недели.

18. Вы повстречали Льва и Единорога, отдыхавших под деревом. Те высказали следующие утверждения.
Лев: — Позавчера был один из дней, когда я лгу.
Единорог: — Позавчера был один из дней, когда я тоже лгу.
В какой день недели Вы повстречали Льва и Единорога?

19. В другой раз Вы встретили одного Льва. Он высказал два утверждения:
1) Я лгал вчера.
2) После завтрашнего дня я буду лгать два дня подряд.
В какой день недели это случилось?

20. В какие дни недели Единорог может высказать следующее единое утверждение: «Я лгал позавчера, и буду лгать послезавтра»?

21. На вопрос: «Какой сегодня день недели?» Лев и Единорог ответили одинаково: «Вторник или Пятница». В какой день недели это случилось?

22. Мальчик Сережа увидел двух двухголовых дракон-

чиков, головы которых спутались. Драконы бывают либо правдивые, то есть все головы говорят только правду, либо лживые, то есть все головы всегда лгут. Сережа решил помочь дракончикам распутать головы. Но для этого ему надо знать, где чья голова. Он спросил это у дракончиков, на что головы ответили:
первая голова: я — правдивая голова;
вторая голова: третья голова — моя родная голова;
третья голова: вторая голова — не родная мне голова;
четвертая голова: третья голова — лживая.
Какие головы принадлежат каким дракончикам?

23. Эта головоломка необычна. Кроме того, в основу ее положено подлинное происшествие. Однажды, когда я гостил на острове рыцарей и лжецов, мне встретились два местных жителя. Я спросил у одного из них: «Кто-нибудь из вас рыцарь?» Мой вопрос не остался без ответа, и я узнал то, что хотел узнать. Кем был островитянин, к которому я обратился с вопросом: рыцарем или лжецом? Кем был другой островитянин? Смею заверить вас, что я предоставил в ваше распоряжение информацию, достаточную для решения задачи.

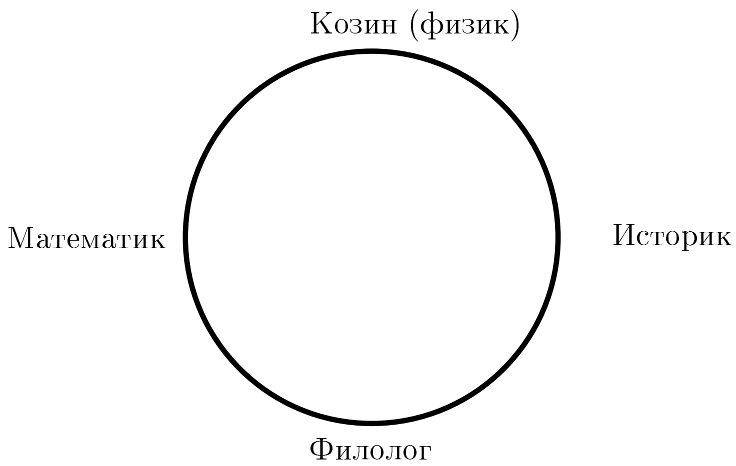
4 Предположения и метод доказательства от противного

Мы уже сталкивались с некоторыми задачами, в которых цепочка выводов отталкивается от некоторого предположения и «раскручивается», приходя либо к противоречию, либо к верному ответу. Это удобно, например, в тех ситуациях, когда делается предположение относительно истинности некоторого высказывания. Рассмотрим еще несколько задач на эту идею.

Пример 16. *За круглым столом сидели 4 студента. Филолог сидел против Козина, рядом с историком. Математик сидел рядом с Волковым. Соседи Шатрова — Егоркин и физик. Какая профессия у Козина?*

▼ Ответ: Козин — математик. Егоркин — историк, Шатров — филолог, Волков — физик.

Из условия видно, что Козин не филолог и не историк. Это следует из того, что филолог сидит против Козина. А рядом с филологим сидит историк, значит Козин не может быть и историком. Допустим, что Козин физик.



Фактически это предположение противного, так как осталось только два варианта. Остальные мы отсекли. Историк сидит слева

от филолога. Так как Козин не математик, то математик сидит справа от филолога. Так как у математика соседи Козин и Волков (по условию), то Волков — филолог. Но тогда видно, что соседями Шатрова обязательно будут Волков и физик, что противоречит условию.

▲

Обратим внимание на то, что противоречие может быть получено разными способами. Важен лишь факт, что он есть. Рассказывать решение этой задачи удобно сделав чертеж. Зачастую дети сами иллюстрируют решение при помощи картинки. При всей наглядности здесь есть некоторая опасность. Зачастую ребёнок, начиная анализировать сложную картинку, забывает с чего начинал и какой случай он вообще разбирает. Поэтому стоит обратить внимание детей, что мы в данной ситуации использовали картинку только после того, как определились какой случай мы разбираем.

Упражнение 4. *Мартышка, Осёл и Козёл затеяли сыграть трио. Уселись чинно в ряд, Мартышка справа. Ударили в смычки, дерут, а толку нет. Поменялись местами, при этом Осёл оказался в центре. А трио всё нейдёт на лад. Пересели ещё раз. При этом оказалось, что каждый из трёх «музыкантов» успел посидеть и слева, и справа, и в центре. Кто где сидел на третий раз?*

Пример 17. *У Порции из комедии Шекспира «Венецианский купец» было три шкатулки: из золота, серебра и свинца. В одной из шкатулок хранился портрет Порции. Поклоннику предлагалось выбрать шкатулку, и если он был достаточно удачлив (или достаточно умен), чтобы выбрать шкатулку с портретом, то получал право назвать Порцию своей невестой. На крышке каждой шкатулки была сделана надпись, которая должна была помочь претенденту на руку и сердце Порции выбрать «правильную» шкатулку.*

Предположим, что Порция вздумала выбирать мужа не по добродетелям, а по уму. На крышках шкатулок она приказала сделать следующие надписи:
На золотой: «Портрет в этой шкатулке.»

На серебряной: «Портрет не в этой шкатулке.»
На свинцовой: «Портрет не в золотой шкатулке.»

Своему поклоннику Порция пояснила, что из трех высказываний, выгравированных на крышках шкатулок только одно истинно. Какую шкатулку следует выбрать поклоннику Порции?

▼ Высказывания, выгравированные на золотой и свинцовой шкатулках, противоположны, поэтому одно из них должно быть истинным. Поскольку истинно неболее чем одно из трех высказываний, то высказывание на крышке серебряной шкатулки ложно. Следовательно, портрет в действительности находится в серебряной шкатулке. Эта задача допускает также другое решение. Если бы портрет находился в золотой шкатулке, то вопреки условиям задачи у нас было бы два истинных высказывания. Если бы портрет был в свинцовой шкатулке, то мы также получили бы два истинных высказывания (на этот раз на свинцовой и на серебряной шкатулках). Следовательно, портрет должен находиться в серебряной шкатулке. Оба метода решения вполне корректны и служат наглядным подтверждением того, как во многих задачах к одному и тому же заключению ведут несколько правильных путей.

▲

Пример 18. *Сидят мальчик и девочка. «Я — мальчик», — сказал первый ребёнок. «Я — девочка», — говорит второй ребёнок. Известно, что хотя бы один из этих двух детей врёт. Кто из них мальчик, а кто девочка?*

▼ Мы рассматриваем ту же задачу для иллюстрации того, какие подходы существуют к решению задач методом предположений. Посмотрим, какие предположения здесь можно выдвинуть и как некоторые из них приводят к противоречию с условием.

Первое решение методом предположений: истинность или ложность высказывания. Можно выбрать одного из этих двух детей и попробовать предположить, какой является сказанная им фраза — истинной или ложной — и исходя из этого «раскручивать» цепочку логических выводов.

Например, рассмотрим первого ребёнка. Предположим, что он говорит правду. Тогда второй должен обязательно солгать (по условию задачи хотя бы один ребёнок врёт). Но тогда сказанное

первым ребёнком — правда (и тогда он действительно является мальчиком), а сказанное вторым ребёнком — ложь (тогда он солгал, когда заявил, что является девочкой, — поэтому он тоже мальчик). Но в этом случае у нас оба ребёнка являются мальчиками, а это противоречит условию.

Итак, наше предположение (о том, что первый ребёнок говорит правду) привело к противоречию, поэтому является неверным. Тогда первый ребёнок врёт, поэтому он не мальчик (как сам утверждает), а девочка. Из условия задачи следует, что сидят мальчик и девочка, поэтому если первый ребёнок — девочка, то второй — мальчик. Это полностью подходит под условие задачи.

Второе решение методом предположений: пол одного из детей. Тоже будем делать предположения, но отталкиваться будем не от истинности или ложности фразы выбранного ребёнка, а от его пола. Рассмотрим первого ребёнка. Предположим, что он является мальчиком. Тогда (по условию задачи) второй ребёнок должен быть девочкой. Но тогда оба ребёнка сказали правду, а это противоречит условию задачи.

Раз наше предположение (о том, что первый ребёнок — мальчик) привело к противоречию, то делаем вывод, что первый ребёнок — девочка. Тогда второй ребёнок — мальчик, и легко заметить, что в этом случае оба ребёнка говорят неправду, что не противоречит условию задачи.

▲

Пример 19. *Пятеро школьников из разных городов области приехали в Ярославль на математикечскую олимпиаду. Их спросили, откуда они, и получили такие ответы:*
Андреев: «Я живу в Угличе, а Григорьев — в Гаврилов-Яме.»
Борисов: «В Гаврилов-Яме живет Васильев, а я прибыл из Рыбинска.»
Васильев: «Из Углича приехал я, а Борисов — из Тутаева.»
Григорьев: «Я прибыл из Гаврилов-Яма, а Данилов — из Ростова.»
Данилов: «Андреев прибыл из Рыбинска, а я действительно живу в Ростове.»
Когда удивились противоречивости их ответов, то председатель жюри объяснил: «Просто каждый из ребят высказал одно пра-

вильное утверждение, а другое неправильное. Но исходя из этого вполне можно установить, кто откуда приехал.» Откуда же приехал каждый из школьников?

▼

Перебрав несколько вариантов, школьники могут достаточно быстро натолкнуться на правильный ответ.

Ученик: — Андреев живет в Угличе, Борисов — в Тутаеве, Васильев — в Гаврилов-Яме, Григорьев — в Рыбинске, Данилов — в Ростове.

Учитель: — Почему ты так решил?

Ученик: — Это подходит. Можем увидеть, что каждый говорит в одной части фразы правду, а в другой — врёт.

Учитель: — Да, это и правда ничему не противоречит. Но вдруг есть еще какая-то подходящая комбинация — мы ведь уже сталкивались с задачами, где несколько ответов?

Ученик: — Нет, другого варианта нет — я рассмотрел все возможные случаи и только этот подошел.

Учитель: — Тогда мало просто сказать ответ. Все случаи, которые перебирались, нужно аккуратно объяснить. То есть, для каждого из остальных вариантов сказать, почему он не подходит. А также нужно будет объяснить, почему перебрали все возможные варианты.

Здесь почти наверняка полного перебора не будет, так как количество комбинаций (для каждого из людей — какая часть высказывания истинна, а какая ложна) равно 32 и быстро их разобрать вряд ли получится. Поэтому к фразе «я перебрал все варианты» надо относиться скептически. Можно предложить школьнику разобрать все оставшиеся варианты письменно — обычно это приводит к тому, что либо школьник показывает не все варианты, а набор частных случаев, либо начинает задумываться над тем, перебрал он все случаи или нет.

Конечно, перебором случаев мы заниматься не будем. Попробуем взять какое-то утверждение за основу, выдвинуть предположение и раскрутить цепочку логических выводов.

Возьмем самое первое высказывание самого первого из указанных людей. По условию задачи оно может быть верным или неверным. Предположим, что оно верное. Тогда Андреев и правда

живет в Угличе, зато Григорьев живет не в Гаврилов-Яме (так как вторая часть высказывания Андреева должна быть ложной). Но тогда сам Григорьев солгал, когда сказал, что живет в Гаврилов-Яме, поэтому сказал правду во второй части высказывания — Данилов живет в Ростове. Посмотрим на Данилова. Получается, что он живет в Ростове, поэтому вторая часть его фразы верная, но тогда в первой части ложь (это ничему не противоречит — Андреев прибыл не из Рыбинска, а из Углича). Остались Борисов и Васильев. Васильев лжет, когда утверждает, что приехал из Углича (мы предположили, что их Углича прибыл Андреев), поэтому истинной должна быть вторая часть фразы — о том, что Борисов из Тутаева. Но Борисов лжет во второй части фразы, поэтому первая часть верна — Васильев живет в Гаврилов-Яме.

Сделанное предположение привело нас к одному ответу (как раз он и обсуждался в самом начале). Но теперь мы должны рассмотреть и второй вариант предположения — о том, что первая часть фразы Андреева ложна.

Итак, Андреев лжет, что он из Углича. Но тогда Григорьев из Гаврилов-Яма, и мы можем начать раскручивать цепочку утверждений. Григорьев сам подтверждает, что из Гаврилов-Яма, поэтому дальше лжет — и Данилов оказывается не из Ростова. Сам Данилов, получается, тоже лжет, когда говорит, что он из Ростова, поэтому Андреев из Рыбинска. Тогда Борисов лжет (что он сам из Рыбинска) — и верной оказывается первая часть его фразы (что Васильев из Гаврилов-Яма). Уже получилось, что из Гаврилов-Яма сразу два человека — Васильев и Григорьев, а это противоречит условию.

Таким образом, мы сделали предположение, а в итоге пришли к противоречию. Поэтому предположение было неверным.

Стало быть, только из первого сделанного предположения удалось прийти к непротиворечивому ответу. Поэтому ответ единственный. Заметим, что мы ограничились перебором всего лишь двух случаев — первая часть фразы Андреева или верна, или ложна (третьего и правда не дано). Это значительно более просто, чем перебирать 32 возможных варианта. То есть, полный перебор, хоть и гарантирует полноту ответа, порой оказывается очень громоздким.

▲

Пример 20. *На острове рыцарей и лжецов среди четырех островитян произошел следующий разговор:*
— По меньшей мере один из нас — лжец.
— По меньшей мере двое из нас — лжецы.
— По меньшей мере трое из нас — лжецы.
— Среди нас нет лжецов.

▼ Здесь снова вполне возможен вариант, что школьники попытаются угадать правильный ответ:
Ученик: — Первый и второй говорят правду, а третий и четвертый лгут.
Учитель: — Почему ты так решил?
Ученик: — Потому что тогда первый говорит правду: он сказал, что лжецов по крайней мере один, а их даже два. И второй говорит правду: лжецов ровно два. Третий говорит неправду: он сказал, что лжецов по крайней мере три, а их два — это меньше. Четвертый тоже говорит неправду, потому что лжецы здесь все-таки есть.
Учитель: — Хорошо. Сейчас разобрано, почему этот случай подходит. Но вдруг подходит какой-то ещё вариант ответа, и в нем тоже всё будет сходиться?

Конечно, после этого можно предложить школьникам перебрать все возможные варианты. Отметим, что возможны два пути. Первый путь: для каждого из высказывающихся рассмотреть два варианта (рыцарь он или лжец), но тогда всего придется перебрать 16 случаев, а это может затянуться. Второй путь: перебор по количеству лжецов — в этом случае по высказываниям школьников можно будет установить, сказали они правду или солгали, после чего посмотреть, совпадает ли количество лжецов с рассматриваемым.

Тем не менее, рассмотрим возможный вариант решения задачи с использованием метода предположений. Здесь наиболее трудный момент — какое именно утверждение выбрать в качестве отправной точки и на основе этого раскрутить цепочку логических рассуждений. В предыдущей задаче мы взяли самое первое утверждение, а сейчас попробуем оттолкнуться от последнего

(тем более, оно самое категоричное).

Итак, предположим, что последний (четвертый) человек говорит правду. Тогда среди всех высказавшихся нет лжецов (он утверждает именно это). Но тогда первые три школьника говорят неправду (они утверждают, что лжецы есть, разногласия между ними только в количестве). Таким образом, предположение привело к противоречию, поэтому оно было неверным.

Но раз предположение неверно, то четвертый человек сказал неправду (то есть, он лжец). Заметим, что тогда правду говорит первый человек — он просто утверждал, что есть хотя бы один лжец. Теперь посмотрим, может ли сказать неправду второй. Если он говорит неправду, то он лжец, и тогда среди четверых островитян уже нашлось два лжеца, а тогда его утверждение должно быть истинным. Здесь возникает внутреннее противоречие, поэтому второй островитянин неправду сказать не мог. Тогда он рыцарь — и у нас уже есть два рыцаря (первый и второй) и один лжец (четвертый).

По той же причине третий островитянин не может сказать правду: если он рыцарь, то его утверждение — о том, что лжецов не меньше трёх, — верно. Но если он рыцарь, то лжец всего один (последний). Снова возникло внутреннее противоречие. Стало быть, третий островитянин — лжец. Легко убедиться (как мы это проделали в начале разбора этой задачи), что этот вариант подходит.

▲

Упражнение 5. *Подумайте, каким был бы ответ в этой задаче, если бы островитян было пятеро и они делают такие же утверждения:*
— По меньшей мере один из нас — лжец.
— По меньшей мере двое из нас — лжецы.
— По меньшей мере трое из нас — лжецы.
— По меньшей мере четверо из нас — лжецы.
— Среди нас нет лжецов.

Упражнение 6. *Решите ту же задачу для n островитян.*

Задачи

24. В соревнованиях по гимнастике на первенство школы участвуют Алла, Валя, Таня и Даша. Болельщики высказали предположения о возможных победителях:
1: «Первой будет Таня, Валя будет второй».
2: «Второй будет Таня, Даша — третьей».
3: «Алла будет второй, Даша — четвертой».

По окончании соревнований оказалось, что в каждом предположении только одно из высказываний истинно, другое же ложно. Какое место на соревнованиях заняла каждая из девочек, если все они оказались на разных местах?

25. Слоненок заметил, что завтра будет среда. На что мартышка ответила: «Вчера же ты сказал, что послезавтра будет четверг». Удав же подумал: «А завтра я скажу, что позавчера был понедельник». Если один из них не прав, то кто?

26. В казино пришли 5 джентльменов. Каждый сказал, что найдется джентльмен, у которого денег меньше чем у него. Доказать, что кто-то из них соврал.

27. У четверых ребят спросили: «Кто из вас самый старший?» На что ребята ответили:
Саша сказал: «Женя старше Леши.»
Женя сказал: «Леша старше Юры.»
Леша сказал: «Саша самый младший.»
Юра сказал: «Леша третий по возрасту.»

Докажите, что кто-то из них ошибся.

28. В финал чемпионата Европы выходили две команды. До соревнований 5 болельщиков рассказали свои прогнозы, что в финал выйдут команды:
1) Франции и Голландии,
2) Бельгии и Италии,
3) Бельгии и Франции ,
4) Англии и Голландии,

5) Голландии и Италии.

Один из прогнозов оказался полностью неверным, а в остальных была названа только одна из команд финалисток. Какие команды вышли в финал?

29. На улице, став в кружок, разговаривают четыре девочки: Аня, Валя, Галя и Нина. Девочка в зелёном платье(не Аня и не Валя) стоит между девочкой в голубом платье и Ниной. Девлчка в белом платье стоит между девочкой в розовом платье и Валей. Какое платье на каждой из девочек?

30. 12 кандидатов в мэры рассказывали о себе. Через некоторое время один сказал: «До меня соврали один раз». Другой сказал: «А теперь — дважды». «А теперь — трижды!» — сказал третий, и так далее до 12-го, который сказал: «А теперь соврали 12 раз». Тут ведущий прервал дискуссию. Оказалось, что по крайней мере один кандидат правильно посчитал, сколько раз соврали до него. Так сколько же раз всего соврали кандидаты?

31. Среди офицеров А,Б,В и Г — майор, капитан и два лейтенанта. А и один из лейтенантов — танкисты, Б и капитан — артиллеристы, А младше по званию, чем В. Определите род войск и звание каждого.

32. Собрались три попугая — Гоша, Кеша и Рома. Один из них всегда говорит правду, другой всегда лжет, а третий — хитрец, он иногда говорит правду, иногда лжет. На вопрос: «Кто Кеша?» — попугаи ответили так:
Гоша: «Кеша лжец.»
Кеша: «Я хитрец!»
Рома: «Он абсолютно честный попугай.»
Кто же из попугаев честный, кто лжец, а кто хитрец?

5 Примеры логических задач

Пример 21. *На двери школы появилось объявление: «Директор категорически возражает против отмены решения о запрете* *контроля за причёсками». Может ли теперь ученик пятого класса Коля Петров покрасить волосы в красный цвет без риска быть наказанным?*

▼ Это типичный пример на двойное отрицание.

Ученик: Директор возражает против отмены запрета, то он за запрет. Значит он не может покрасить волосы.

Учитель: Будь внимательнее, запрет чего обсуждается в предложении?

Ученик: Точно! Запрет, контроля, значит он может красить волосы безнаказанно.

▲

Пример 22. *Человек разгядывает портрет. «Чей портрет вы рассматриваете?» спрашивают у него, и человек отвечает:«В семье я рос один, как перст, один. И все ж отец того, кто на портрете,- сын моего отца.» Чей портрет разглядывает человек?*

▼

Будьте внимательны! Очень часто в этой задаче дети получают неправильный ответ и настаивают на нём. Как правило их рассуждения весьма запутаны и разобраться в них достаточно сложно. Чтобы разобраться в ситуации нужно для начала упростить структуру предложения. Типичной ошибкой является следующая. Ученик мысленно ставит себя на место человека, разглядывающего портрет, и рассуждает следующим образом.

Ученик: Так как у меня нет ни братьев, ни сестер, то сыном моего отца могу быть я сам и никто другой. Следовательно, я смотрю на свой собственный портрет.

Учитель: Первое утверждение абсолютно правильно: если у меня нет ни братьев, ни сестер, то сыном моего отца могу быть только я сам. Но отсюда отнюдь не следует, будто правильный ответ на вопрос задачи гласит: «Самого себя». Так можно было бы ответить, если бы во второй посылке стояло «и все же тот, кого мы видим на портрете, — сын моего отца». Но в условии задачи этого не говорится. Там утверждается, что «отец того, кто на портрете, сын моего отца».

Ученик: Как же тогда нужно рассуждать, чтобы не запутаться.

Учитель: Давай рассуждать по порядку. Отец человека на портрете — сын моего отца. Подставляя краткое «я» вместо

более громоздкого выражения «сын моего отца», преобразуем утверждение к следующему: отец человека на портрете — я. Поскольку я отец человека на портрете, то он должен быть моим сыном. Следовательно, правильный ответ состоит в том, что человек разглядывает портрет своего сына.

▲

Пример 23. *После представления «Ревизора» состоялся диалог.*
Бобчинский: «Это Вы, Пётр Иванович, первый сказали "Э!" Вы сами так говорили.»
Добчинский: «Нет, Пётр Иванович, я так не говорил. Это Вы сёмгу первый заказали. Вы и сказали "Э!" А у меня во рту зуб со свистом.»
Бобчинский: «Что я сёмгу первый заказал, это верно. И верно, что у Вас зуб со свистом. А всё-таки, это Вы первый сказали "Э!"»
Выясните, кто первым сказал «Э!», если известно, что из девяти произнесённых в этом диалоге фраз-утверждений чётное количество верных.

▼ В этой задаче ученики могут попытаться угадать правильный ответ. Собственно, оно и немудрено — раз всего два варианта (либо Бобчинский, либо Добчинский). Поэтому просто ответ, конечно же, принимать не нужно. Более того — в качестве обоснования ответа могут быть и более развернутые комбинации фактов о помещиках. Например, такие: Ученик: — Это Бобчинский сказал «Э!» Об этом сказал Добчинский, у него же во рту зуб со свистом. А сёмгу заказал Бобчинский. Тогда будет шесть верных высказываний и три неверных. Естественно, здесь мы сталкиваемся с распространенной ошибкой: вместо решения задачи, которое является и обоснованием, почему других ответов быть не может, предлагается один из ответов, подходящий под условие задачи. Каждый раз необходимо обращать внимание школьников на то, что одного ответа (пусть и с объяснением, почему он подходит) недостаточно — задача не может считаться решенной, пока нет обоснования отсутствия других вариантов ответа.

С чего же можно начать решение данной задачи? Перебор здесь выглядит очень громоздким: кто сказал «Э!», кто заказал сёмгу и так далее — рассмотрение всех комбинаций приводит к тому, что нужно разбирать 16 случаев, а это нелегко (и возникает соблазн бросить перебор при первом же найденном правильном ответе).

Перебрать возможные варианты количества верных фраз-утверждений? Тоже не самая хорошая идея — ведь мы все равно не знаем, какие именно утверждения истинные, а какие ложные. В итоге этот способ тоже сведётся к полному перебору вариантов, что довольно долго (хотя, конечно, аккуратно проведенный полный перебор даст нам полное решение).

Можно заметить, что Бобчинский и Добчинский делают очень много повторяющихся заявлений — или соглашаясь, или противореча друг другу. Поэтому можно просто вычеркивать такие группы утверждений и следить, как это влияет на четность. Начнем это делать.

Бобчинский утверждает, будто это Добчинский заявил, что сам первым сказал «Э!» Добчинский первой же своей фразой утверждает обратное. Мы не знаем, кто из них прав, но точно можем сказать, что из этих двух утверждений одно истинное, а одно ложное (это верно и в более общем случае: если есть некоторое утверждение А и ещё утверждение «А неверно», то из этих двух утверждений одно верно и одно ложно). Итак, вычеркнем эти два утверждения — в результате количество верных утверждений уменьшится на 1 и станет нечетным (раз до вычеркивания было четным).

Оба помещика (Бобчинский и Добчинский) согласны в том, что Бобчинский сёмгу заказал. Несмотря на их согласие, мы не знаем, верно это утверждение или нет. Но это не страшно: вычеркнем оба этих утверждения — тогда будут вычеркнуты либо два истинных утверждения, либо два ложных. В обоих случаях количество верных утверждений останется нечетным. Точно так же поступим с утверждением, что у Добчинского зуб со свистом.

Бобчинский дважды утверждает, что Добчинский первым сказал «Э!», поэтому у нас есть или два истинных утверждения, или два ложных. Вычеркнем их — количество истинных утверждений осталось нечетным. Но невычеркнутое утверждение осталось только одно (Добчинский утверждает, что не он сказал «Э!») — оно не может быть ложным (иначе истинных утверждений будеть

ноль — четное количество). Таким образом, Добчинский в этой фразе сказал правду, поэтому именно Бобчинский первым сказал «Э!»

▲

Упражнение 7. *Двоих судили за убийство. Присяжные признали одного из обвиняемых виновным, а другого невиновным. Судья обратился к тому, кто был признан виновным, и сказал: «Это самое странное дело из всех, которые мне приходилось разбирать. Хотя ваша вина вне всяких сомнений установлена, по закону я должен выпустить вас на свободу». Как объяснить столь неожиданное заявление судьи?*

Упражнение 8. *Двое краснокожих сидели на бревнышке, один повыше ростом, другой пониже. Тот, кто пониже ростом, доводится сыном тому, кто повыше ростом, хотя тот, кто повыше ростом, - не его отец. Как вы это объясните?*

Пример 24. *Предположим, что преступник — лжец (о чем известно суду) и вы также лжец (о чем суду не известно), но тем не менее не виновны в совершении инкриминируемого вам преступления. Вам предоставляется право произнести одну-единственную фразу. Ваша цель — убедить присяжных не только в том, что вы не лжец, но и в том, что вы не виновны. Что бы вы сказали?*

▼ Все подозрения с вас могло бы снять одно-единственное высказывание: «Я виновен.» Вы, будучи лжецом, могли бы сделать такое заявление на суде, поскольку оно ложно, и оно сняло бы с вас подозрения, так как присяжные, искушенные в логике, рассуждали бы следующим образом. Если бы вы действительно были виновны, то вы были бы лжецом (так как известно, что преступник — лжец). Но тогда вы, будучи лжецом, высказали бы истинное утверждение. Таким образом, предположение о том, что вы виновны, приводит к противоречию. Следовательно, вы не виновны. Приведенное нами рассуждение присяжных может служить типичным примером рассуждения от противного (ложность утверждения доказывается тем, что высказанный тезис доводится до нелепости, отсюда латинское название этого способа доказательства *reductio ad absurdum* — приведение к нелепости). Присяжные могли бы прийти к тому же выводу и более прямым путем, рассуждая следующим образом. Вы либо лжец, либо не лжец (напомним, что присяжным не известно, лжец вы или не лжец). Если вы лжец, то ваше высказывание ложно. Следовательно, вы не виновны. Если вы не лжец, то вы заведомо не виновны, так как преступник — лжец.

▲

Пример 25. *Вадим и Роман еще в автобусе разговаривали о предстоящей вступительной олимпиаде. Вадим сказал: «Если я решу больше трех задач, то и ты решишь больше трех задач», на что Рома ответил: «А если я не решу трех задач, то и тебе не решить более трех задач». Докажите, что вне зависимости от того, как они написали олимпиаду, Вадик и Рома либо оба оказались правы, либо оба оказались неправы.*

▼

▲

Эта задача непривычна для детей так как в ней ответ уже дан, но нужно описать множество конечных ситуаций которые подходят под условие. Приведем часть решения. Предположим, что Вадим сказала правду. Покажем, что тогда и Роман сказал правду. Пусть Вадим решил меньше трёх задач, может ли Рома солгать? Если Рома решил меньше трёх задач, тогда, чтобы второе высказывание было ложным, Рома должен решить больше трёх задач. Это противоречит нашему предположению. Если Рома решил больше трёх задач, то оба высказывания верны. Для детей это не всегда очевидно. Здесь высказывания содержат сложную конструкцию: «Если..., то...» Мы умышленно не заостряем на ней внимание. Нам лишь важно, что если условие в высказывании не выполняется, то высказывание не может быть ложным, а значит истинно. Это стоит особенно подчеркнуть. Таким образом мы разобрали первую ситуацию. Остальные случаи разбираются аналогично.

Упражнение 9. *Среди четырёх людей нет трех с одинаковым именем, одинаковым отчеством или одинаковой фамилией, но у любых двух людей совпадают либо имя, либо отчество, либо фамилия. Может ли так быть?*

Ответ: могло. Попробуйте написать такие имена.

Задачи

33. В кошельке лежат две монеты на сумму 15 рублей. Одна из этих монет точно не пятирублёвая. Какие это монеты?

34. Когда три подруги — Надя, Валя и Маша — вышли гулять, на них были белое, красное и синее платья. Туфли их были тех же трех цветов, но только у Нади цвета туфель и платья совпадали. При этом у Вали ни платье, ни туфли не были синими, а Маша была в красных туфлях.
а) Объясните, почему у Вали могут быть только белые туфли.
б) Определите цвет платьев и туфель каждой из подруг.

35. В спортивном зале находятся 2013 воздушных шаров — красных и синих. Известно, что: 1) по крайней мере один из шаров красный; 2) из каждой произвольно выбранной пары шаров по крайней мере один синий. Сколько в спортивном зале красных шаров?

36. В корзине лежат 30 грибов. Среди любых 12 из них имеется хотя бы один рыжик, а среди любых 20 грибов — хотя бы один груздь. Сколько рыжиков и сколько груздей в корзине?

37. Неверно, что все друзья моего друга — мои друзья. Что тогда верно?

38. На этот раз на допрос были вызваны четверо подозреваемых в ограблении: A, B, C и D. Неопровержимыми уликами доказано, что по крайней мере один из них виновен и что никто, кроме A, B, C и D, в ограблении не участвовал. Кроме того, удалось установить следующее:
1) A безусловно не виновен.
2) Если B виновен, то у него был ровно один соучастник.
3) Если C виновен, то у него было ровно два соучастника.

Инспектору Крэгу было особенно важно узнать, виновен или не виновен D, так как D был опасным преступником. К счастью, приведенных выше фактов достаточно, чтобы установить виновность или невиновность подозреваемого D.

Итак, виновен или не виновен D?

39. На острове живут рыцари и лжецы. Рыцари — это те, кто всегда говорит правду, а лжецы — те, кто всегда лгут. Каждый из трех островитян сказал, что среди двух оставшихся есть хотя бы один рыцарь. Доказать, что если есть хотя бы один рыцарь, то все трое из них рыцари.

40. В тетради было написано 40 утверждений:

— В этой тетради ровно 1 неверное утверждение.

— В этой тетради ровно 2 неверных утверждения.

— В этой тетради ровно 3 неверных утверждения.

...

— В этой тетради ровно 40 неверных утверждений.

Сколько же в этой тетради верных утверждений? Найдите все возможные варианты ответа и объясните, почему других нет.

41. В день рождения дяди Федора почтальон Печкин хочет выяснить, сколько тому лет. Шарик говорит, что дяде Федору больше 11 лет, а кот Матроскин утверждает, что больше 10 лет. Сколько лет дяде Федору, если известно, что ровно один из них ошибся? Ответ обоснуйте.

42. На столе лежат в ряд четыре фигуры: треугольник, круг, прямоугольник и ромб. Они окрашены в разные цвета: красный, синий, жёлтый, зелёный. Известно, что красная фигура лежит между синей и зелёной; справа от жёлтой фигуры лежит ромб; круг лежит правее и треугольника и ромба; треугольник лежит не с краю; синяя и жёлтая фигуры лежат не рядом. Определите, в каком порядке лежат фигуры и какого они цвета.

43. Пять первоклассников стояли в шеренгу и держали 37 флажков. У всех справа от Таты — 14 флажков, справа

от Яши — 32, справа от Веры — 20, справа от Максима — 8. Сколько флажков у Даши?

44. В забеге шести спортсменов Андрей отстал от Бориса и еще от двух спортсменов. Виктор финишировал после Дмитрия, но ранее Геннадия. Дмитрий опередил Бориса, но все же пришел после Евгения. Какое место занял каждый спортсмен?

45. Мачеха, уезжая на бал, дала Золушке мешок, в котором были перемешаны мак и просо, и велела перебрать их. Когда Золушка уезжала на бал, она оставила три мешка: в одном было просо, в другом — мак, а в третьем — ещё не разобранная смесь. Чтобы не перепутать мешки, Золушка к каждому из них прикрепила по табличке: «Мак», «Просо» и «Смесь». Мачеха вернулась с бала первой и нарочно поменяла местами все таблички так, чтобы на каждом мешке оказалась неправильная надпись. Ученик Феи успел предупредить Золушку, что теперь ни одна надпись на мешках не соответствует действительности. Тогда Золушка достала только одно-единственное зёрнышко из одного мешка и, посмотрев на него, сразу догадалась, где что лежит. Как она это сделала?

46. У подводного царя служат осьминоги с шестью, семью или восемью ногами. Те, у кого 7 ног, всегда лгут, а у кого 6 или 8 ног, всегда говорят правду. Встретились четыре осьминога. Синий сказал: «Вместе у нас 28 ног», зеленый: «Вместе у нас 27 ног», желтый: «Вместе у нас 26 ног», красный: «Вместе у нас 25 ног». У кого сколько ног?

47. Я купил лотерейный билет, у которого сумма цифр его пятизначного номера оказалась равна возрасту моего соседа. Определите номер этого билета, если известно, что мой сосед без труда решил эту задачу.

48. На полянке собрались божьи коровки. Если у божьей коровки на спине 6 точек, то она всегда говорит правду, а если 4 точки - то она всегда лжет, а других божьих коровок на полянке не было. Первая божья коровка сказала: «У нас у каждой одинаковое количество точек на спине». Вторая сказала: «У всех вместе на спинах 30 точек». — «Нет, у всех вместе 26 точек на спинах», — возразила третья. «Из этих троих ровно одна сказала правду», — заявила каждая из остальных божьих коровок. Сколько всего божьих коровок собралось на полянке?

ОТВЕТЫ

1. Нет. Среди не являющихся чемпионом могут быть и те, кто хорошо учится. **2.** Эти обитатели леса — зеленые. **3.** Не означает. **4.** Да. **5.** Нет. **6.** Нет. **7.** а) Да. б) Нет. **8.** Один из вариантов вопроса: «Если я задумаю число 1 или 2, то при сложении с твоим числом получится больше 3?». **9.** Тим — рыцарь (честный), Том — лжец. **10.** Там — рыцарь (честный), Тум — лжец. **11.** Один. **12.** Ответ: третий островитянин сказал «Один.» . **13.** Ответ: Кондратьев — столяр, Давыдов — маляр, Фёдоров — водопроводчик. **14.** A — лжец, B — рыцарь и C — лжец. **15.** Про B ничего сказать нельзя, а вот C — рыцарь. **16.** Оба лжецы. **17.** Лжец. **18.** В пятницу. **19.** Во вторник. **20.** В четверг, пятницу или субботу. **21.** Вторник, пятница или четверг. **22.** Одному — первая и третья, другому — вторая и четвертая. **23.** Островитянин, к которому я обратился с вопросом, — лжец, а другой — рыцарь. **24.** Первое место — Таня, второе — Алла, третье — Даша, четвертое — Валя. **25.** Мартышка. **26.** Точно соврал тот, у кого было меньше всего денег (а если таких несколько, то все они соврали). **27.** Указание: по первым трем утверждениям определите, в каком порядке (по возрасту) располагаются эти четверо ребят. **28.** Команды Франции и Италии. **29.** Ответ: На Ане — белое платье, на Вале — голубое, на Нине — розовое, на Галине — зелёное. Стоят по кругу так: Аня, Валя, Галя, Нина. **30.** Ответ: всего соврали 12 раз (все, кроме первого кандидата, а еще одна ложь была где-то в начале дискуссии). Указание: попробуйте предположить, что первый кандидат солгал. **31.** Ответ: Б — майор-артиллерист, В — капитан — артиллерист, А и Г — лейтенанты-танкисты. **32.** Ответ: честный — Гоша, хитрец — Рома, лжец — Кеша. Указание: предположите, что Рома является честным, и получите отсюда противоречие. **33.** 5 рублей и 10 рублей. Вторая из этих монет и правда не пятирублёвая. **34.** У Нади туфли и платье синего цвета; у Вали туфли белые, платье красное; у Маши туфли красные, платье белое. **35.** 1 красный шар. Указание: подумайте, может ли в комнате быть два красных шара. А больше двух красных шаров?. **36.** 19 рыжиков и 11 груздей. Указание: подумайте, почему не может быть 12 груздей. А почему не может быть больше 12 груздей? А может ли быть 20 рыжиков или больше?. **37.** Среди друзей моего друга найдутся те, кто моими друзьями не является. **38.** Виновен. **39.** Если есть рыцарь (обозначим его буквой А), то остальные двое говорят, что среди остальных двоих есть хотя бы один рыцарь, — и это правда (например, рыцарем среди остальных двух будет являться А). **40.** Одно: «В этой тетради ровно 39 неверных утверждений.» Обратите внимание на то, что в тетради написано 40 утверждений, каждые два из которых противоречат друг другу. **41.** 11 лет. Обратите внимание, что если не ошибся Шарик, то не ошибся и Матроскин, что противоречит условию. **42.** Жёлтый прямоугольник, зелёный ромб, красный треугольник, синий круг. Указание: сначала определите, как расположены фигуры по цвету, не обращая внимание на их форму. **43.** 8 флажков. Указание: обратите внимание, что чем больше флажков справа от первоклассника, тем левее его место в шеренге. **44.** Евгений, Дмитрий, Борис, Андрей, Виктор, Геннадий. **45.** Надо взять зёрнышко из мешка, на котором написано «Смесь». **46.** У зелёного осьминога 6 ног, а у остальных по 7 ног. Указание: так как осьминоги противоречат друг другу, то возможны два случая: либо все осьминоги лгут, либо ровно один из них говорит правду. **47.** 99999. Указание: объясните, почему в билете не может быть двух разных цифр. А теперь подумайте, почему в ситуации, когда все цифры одинаковые, но не равны 9, у соседа будут затруднения с этой задачей. **48.** Пять. Указание: объясните сначала, почему первая божья коровка говорит неправду.

Учебное издание

Логика.

Методические указания

Составители **Богомолов** Юрий Викторович
Преображенский Игорь Евгеньевич

Компьютерный набор и верстка: Ю.В. Богомолов, И.Е. Преображенский

Подписано в печать . .2013. Формат 60x84/16.
Бумага тип.
Усл. печ. л. 2,5. Уч.-изд. л. 2,5. Тираж экз. Заказ