Департамент образования Ярославской области

Государственное образовательное учреждение
дополнительного образования Ярославской области
«Ярославский региональный инновационно-образовательный центр «Новая школа»

| | |
|---|---|
| Принята на заседании<br>Педагогического совета<br>ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа»<br>от «31» августа 2017 года<br>Протокол № 2 | Утверждаю<br>Директор<br>ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа»<br>И.С. Леонова<br>«31» августа 2017 года |

Дополнительная общеобразовательная программа –
дополнительная общеразвивающая программа
естественнонаучной направленности

# «Математика: удивительный мир логики и творчества»

Возраст обучающихся: 11-14 лет (5-8 класс)

Срок реализации: 3 года


Авторы программы:

Ю.В. Богомолов,
кандидат физико-математических наук
доцент кафедры дискретного анализа
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г.Демидова;

И.Е. Преображенский,
инженер-исследователь
МНИЛ «Дискретная и вычислительная геометрия» им. Б.Н.Делоне
ФГБОУ ВО ЯрГУ им. П.Г.Демидова.


г. Ярославль, 2017

## Раздел №1 Комплекс основных характеристик программы

### 1. Пояснительная записка дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы естественнонаучной направленности «Математика: удивительный мир логики и творчества»

В настоящее время математика является неотъемлемой частью личной и профессиональной компетенции, лежит в основе логического и аналитического стиля мышления, а также представляет собой неотъемлемый компонент многовековой общечеловеческой культуры. Это позволяет выдвигать в качестве одной из наиболее важных задач системы образования повышение доступности многоуровневого математического образования, позволяющего удовлетворить разнообразные индивидуальные образовательные потребности и в целом способствующего развитию математических компетенций.

Важной идеей при построении эффективной схемы организации дополнительного математического образования, ориентированной и на широкий охват потенциальной целевой аудитории, и на удовлетворение индивидуальных потребностей, является многоуровневость, позволяющая решать различные образовательные задачи и выбирать тот уровень дополнительного образования, который соответствует возможностям, интересам и текущему уровню образованности ребенка.

Одним из компонентов практической реализации данной идеи является организация математических занятий с обучающимися 11-14 лет в рамках широкой сети математических объединений, реализующих дополнительную общеобразовательную – дополнительную общеразвивающую программу «Математика: удивительный мир логики и творчества». Основной направленностью занятий первого года обучения по программе является ознакомление школьников с общими принципами решения математических задач, а также формирование необходимой базы для изучения новых, неизвестных им разделов математики (в особенности тех, которые не затрагиваются в программе средней школы). В рамках занятий второго года обучения обучающиеся закрепляют изученные идеи, методы, принципы решения задач, изучают новые разделы математики, на углубленном уровне осваивают ранее рассмотренные области математического знания. Такой же системообразующий подход предполагается и в реализации программы третьего года обучения.

Согласно Концепции развития математического образования в Российской Федерации (утверждена распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 года № 2506-р), ключевая роль в программе отводится самостоятельному решению задач, в том числе нестандартных, новых, неожиданных. Это обеспечивает активный, деятельностный приоритет (в отличие от пассивного запоминания фактов), свойственный для математического образования. Именно за счет соответствующего подбора задач достигается вариативность реализуемой программы. Учебно-тематический план универсален для всех групп, занимающихся по программе соответствующего года обучения, в то время как формированием адекватного комплекта (или комплектов) заданий возможна как адаптация тематического блока под соответствующий текущий уровень обучающихся, так и подготовка индивидуального образовательного маршрута. Знакомство с нестандартными математическими задачами и идеями мотивирует личность учащегося к познанию и творчеству, создают положительный образ математики и математического творчества, а занятия в рамках системы дополнительного образования создают благоприятные условия для развития личности ребенка, его самореализации, культурного самоопределения и интеграции в систему мировой культуры.

В основу создания авторской дополнительной общеобразовательной – дополнительной общеразвивающей программы «Математика: удивительный мир логики и творчества» заложен многолетний опыт работы авторов и анализ собственной педагогической деятельности по данному направлению, авторские практические наработки, учет специфики обучения в ГОУ ДО ЯО ЯРИОЦ «Новая школа», предполагающей участие обучающихся в олимпиадах, научно-практических конференциях и конкурсах по математике разного уровня и основные требования по подготовке к данным видам проверки уровня подготовленности обучающихся.

Настоящая программа оформлена в соответствии с «Методическими рекомендациями по проектированию дополнительных общеразвивающих программ (включая разноуровневые программы)», разработанные Минобрнауки России совместно с ГАОУ ВО «Московский государственный педагогический университет», ФГАУ «Федеральный институт развития образования» и АНО дополнительного профессионального образования «Открытое образование» согласно (Письмо Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 18 ноября 2015 г. N 09 3242 «О направлении информации»)

### *1.1. Актуальность программы*

Актуальность дополнительной общеобразовательной - дополнительной общеразвивающей программы «Математика: удивительный мир логики и творчества» определяется нормативно-правовым документом федерального уровня - Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам (Приказ Министерства образования и науки Российской Федерации (Минобрнауки России) от 29 августа 2013 г. N 1008) направлен на «удовлетворение индивидуальных потребностей обучающихся в интеллектуальном развитии» а также на «формирование и развитие творческих способностей учащихся, выявление, развитие и поддержку талантливых учащихся».

Актуальность настоящей программы обусловлена необходимостью выявления и поддержки наиболее способных обучающихся средних классов школ Ярославля и Ярославской области, имеющих признаки интеллектуальной одаренности в предметах естественнонаучной направленности. Востребованность и значимость разработки и реализации настоящей программы вызваны ограниченными возможностями обучающихся общеобразовательных школ, расположенных в населенных пунктах, удаленных от научных центров, в углубленных (и даже просто дополнительных) занятиях математикой. В связи с этим предложенная программа в первую очередь обеспечивает доступность дополнительного математического образования, возможность развертывания локальных математических объединений, создания на их базе условий для развития математических способностей и наклонностей школьников, поддержки их интереса к математике и другим естественнонаучным дисциплинам.

### *1.2. Основные идеи, подходы и принципы*

Ключевой особенностью программы является объединение двух подходов: с одной стороны, нацеленность на широкий охват школьников, массовость и доступность, но при этом в основе содержательной части программы лежат специфические тематические разделы, не затрагиваемые в школьном курсе математики, но имеющие важное теоретическое и прикладное значение. Иначе говоря, это попытка перенести основную структуру существующих программ дополнительного образования для высокомотивированных школьников с высоким начальным уровнем (и прошедших некоторый начальный отбор), на более широкую целевую аудиторию обучающихся, заинтересованных в дополнительных занятиях математикой.

Другой особенностью настоящей программы является распределенность и чередуемость наиболее крупных и важных содержательных блоков в структуре программы. С учетом объективных возрастных особенностей предполагаемой целевой аудитории разумным выглядит сознательный отказ от длительного изучения одной темы, приводящего к снижению заинтересованности и включенности обучающихся. Вместо этого адекватным решением является разбиение крупного тематического раздела на более мелкие содержательные учебные модули и распределение их по учебно-тематическому плану, что позволит активизировать интерес детей к содержанию программы (обучающиеся увидят содержательное разнообразие математики, смогут переключаться с одного тематического раздела на другой) и при этом периодически актуализировать знания, полученные ранее.

Педагогическая целесообразность и практическая значимость программы обусловлены следующими ее характеристиками:

1. Программа не имеет жестких требований к необходимому начальному уровню знаний и практических умений обучающихся, ориентирована на широкий охват потенциальной целевой аудитории.
2. Программа нацелена на удовлетворение индивидуальных познавательных интересов и образовательных запросов обучающихся, что обеспечивается за счет ее многоуровневости, позволяющей решать различные образовательные задачи и выбирать тот уровень дополнительного образования, который соответствует возможностям, потребностям и текущему уровню образованности школьников.
3. Программа естественным образом дополняет школьный курс обучения, ориентируясь в большей степени не на алгоритмичность работы с математическими структурами и выполнения математических операций, а на изучение общих методов, идей и принципов решения математических задач.
4. Программа включает новые области знаний, расширяющие кругозор и дающие представления о системе естественнонаучных знаний и об основных принципах научности.
5. Программа ориентирована на подготовку обучающихся к реальной практической деятельности, научно-исследовательской работе, на создание своеобразной коммуникативной среды, стимулирующей инициативу и самостоятельность обучающихся в умственном и личностном развитии, способствующей развитию и реализации творческих способностей.

6. Программа может быть реализована школьным учителем математики в рамках внеурочной деятельности, дополнительных занятий, элективных курсов.

### *1.3. Целевая аудитория*

Программа рассчитана на обучающихся 11-14 лет (5–8 класс) общеобразовательных учреждений.

В соответствии с Концепцией развития дополнительного образования детей (утв. распоряжением Правительства РФ от 04.09.2014 года №1726-р), реализация программы для интересующихся математикой обучающихся производится на трёх уровнях: стартовом, базовом и продвинутом.

Обучающиеся на ***стартовом уровне*** знакомятся с основными понятиями, изучаемые в ходе реализации программы, а также на минимальном уровне сложности учатся применять основные подходы к решению задач (типовые задачи на явное применение правил, формул, признаков, числовых соотношений, шаблонных утверждений лемм и теорем). Основной упор делается на понимание основных идей, а также их самостоятельную иллюстрацию примерами. Также данный уровень рассматривается как переходный к более высоким уровням освоения программы после адаптации и формирования устойчивого интереса к систематическим занятиям математикой.

Обучающиеся на ***базовом уровне*** получают целостный набор взаимосвязанных понятий, идей, методов, учатся применять основные подходы к решению задач на базовом уровне (применение основных подходов, методов, идей решения практических задач с заранее не обозначенным алгоритмом решения). Основной упор делается на применение изучаемых математических принципов к самостоятельному решению задач. Возможно рассматривать данный уровень как переходный к продвинутому уровню освоения программы при формировании устойчивого интереса к систематическим занятиям математикой, а также успешного освоения программы на данном уровне.

Обучающиеся на ***продвинутом уровне*** ориентированы на овладение в полной мере ключевыми понятиями, принципами, методами решения задач, способны понять взаимосвязь математических понятий, способны быстро адаптироваться к применению разнообразных методов к решению сложных практических задач с заранее не обозначенным алгоритмом решения. Также в рамках реализации программы на данном уровне возможно освоение узкопрофильными разделами математики в рамках тематических блоков программы.

Формальные строгие требования к необходимому начальному уровню математической подготовки обучающихся на стартовом уровне отсутствуют, для понимания основных предлагаемых понятий и содержательной части тематических разделов программы вполне достаточно освоения программы начальной школы. Изучение программы на базовом уровне (для каждого года обучения) предполагает наличие хорошего уровня начальной математической подготовки в объеме программы общеобразовательной школы для соответствующего возраста, умения логически рассуждать, а также сформированной мотивации к изучению математики. Целевой аудиторией для работы в рамках программы на продвинутом уровне являются мотивированные обучающиеся, продемонстрировавшие свои способности к достаточно нестандартному мышлению в сочетании с высоким уровнем основных математических компетенций.

### ***1.4. Срок, объем и форма освоения программы***

Дополнительная общеобразовательная – дополнительная общеразвивающая программа «Математика: удивительный мир логики и творчества» реализуется в течение 3 лет.

Общий Учебно-тематический объем программы составляет 216 часов, из них:

– количество часов первого года обучения – 72

– количество часов второго года обучения - 72

– количество часов третьего года обучения – 72

| Год обучения | Количество часов | Из них | |
|---|---|---|---|
| | | Лекционные | Практические |
| 1 год | 72 | 22 | 50 |
| 2 год | | | |
| Учебно-тематический план №1 | 72 | 22 | 50 |
| Учебно-тематический план №2 | 72 | 20 | 52 |
| Учебно-тематический план №3 | 72 | 18 | 54 |
| 3 год | | | |
| Учебно-тематический план №1 | 72 | 26 | 46 |
| Учебно-тематический план №2 | 72 | 24 | 48 |
| Учебно-тематический план №3 | 72 | 20 | 52 |

Дополнительная общеобразовательная – дополнительная общеразвивающая программа «Математика: удивительный мир логики и творчества» предусматривает вариативность распределения академической нагрузки между теоретическими и практическими формами обучения. При реализации программы со второго года обучения количество часов, отведенных на теоретические и практические занятия, варьируется в зависимости от выбранного педагогом варианта учебного плана. Однако даже в этом случае такое распределение носит исключительно рекомендуемый характер и может быть изменено педагогом для более эффективного решения текущих образовательных задач и более полного освоения обучающимися программного материала в соответствии с выбранным уровнем.

Форма обучения: очная.

### *1.5. Режим занятий, периодичность и продолжительность занятий*

Учебная нагрузка определяется с учетом возраста детей, года обучения. В соответствии с СанПин «Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации режима работы образовательных организаций дополнительного образования детей» (Постановление Главного государственного санитарного врача РФ от 4 июля 2014 г. № 41), устанавливается продолжительность занятий (в академических часах), их периодичность и общее количество часов в неделю и за год.

Занятия проводятся 1 раз в неделю по 2 академических часа (по 45 минут) с обязательным 10-минутным перерывом.

### *1.6. Особенности организации образовательного процесса*

Зачисление в учебную группу проводится круглогодично, в зависимости от наличия вакантных бюджетных мест, осуществляется при желании ребенка по заявлению родителей (законных представителей). Занятия проводятся преимущественно в одновозрастных группах,

Структура и содержание программы допускают также дальнейшее вовлечение в процесс обучения по данной программе тех обучающихся, которые по различным причинам не прошли программу первого года или даже первых двух лет обучения (безусловно, процесс такого включение в работу соответствующего математического объединения будет успешным при должной мотивации обучающегося, а также при хорошем уровне освоения школьной программы 1–6 или 1–7 классов средней школы).

В процессе изучения программного материала предполагаются следующие формы организации обучения:

- индивидуальная, групповая, коллективная;
- взаимное обучение, самообучение, саморазвитие.

Программой предусмотрено проведение лекционных и практических занятий (в большинстве случаев без явного разделения занятия между этими двумя формами), выполнение контрольных работ, проведение математических соревнований.

Структура и содержание отдельного занятия выстраивается вокруг задач для самостоятельного решения обучающимися. Комплект («листок», «пакет») разноуровневых нестандартных задач является смысловым стержнем занятия: самостоятельно выполняя нестандартные задания, обучающиеся осваивают новые для них идеи и принципы. При этом новый теоретический материал, математические понятия, утверждения, основы новых (для детей) отраслей математики не декларируются педагогом, а вводятся совершенно естественным путём на основе прикладного проблемно-ориентированного подхода, ложатся на подготовленную почву и эффективно усваиваются обучающимися.

Особенности построения занятий на основе такого «листкового» подхода описаны ниже в разделе «Методическое обеспечение. Формы организации занятия на основе решения задач».

В основу реализации данной программы положены следующие основные принципы:

– изучение новых областей математики, овладение научными умениями и навыками производится в предположении строгой логической обоснованности переходов от одного раздела математики к другому, что составляет принцип систематичности и последовательности;
– в ходе занятий обучающимся сообщаются знания, основанные на проверенных и обоснованных положениях, фактах, теориях, что является основной составляющей принципа научности;
– принцип сознательности и активности, предполагающий понимание учащимися смысла усваиваемой информации, понимание цели и значимости учебной деятельности.

## 2. Цель и задачи программы

**Цель** – формирование общей математической культуры обучающихся, содействие их интеллектуальному и творческому развитию в процессе углубленного изучения предметной области «Математика».

Реализация поставленной цели предусматривает решение следующих **задач:**

***1. Образовательные задачи:***

- формирование и развитие у обучающихся интереса к математике и в целом к естественнонаучным знаниям, активизация познавательной деятельности;
- углубление и расширение знаний обучающихся по математике;
- формирование математического языка и математического аппарата как средства описания и исследования окружающего мира;
- развитие способности глубоко, систематически и самостоятельно разбираться в сложных математических проблемах;
- формирование и развитие нестандартного, основанного на глубоких научных понятиях мышления;
- формирование и закрепление представлений об основных принципах научности и доказательности в математике.

***2. Воспитательные задачи:***

- воспитание понимания роли математики в современном мире, осознания ее необходимости как элемента культуры, социальной, личной и профессиональной компетентности;
- развитие критичности мышления, воспитание самодисциплины, настойчивости, целеустремленности;
- воспитание математической культуры, в том числе как части общечеловеческой культуры.

***3. Развивающие задачи:***

- развитие логического, алгоритмического и эвристического мышления,

необходимых для полноценного функционирования в современном обществе и являющихся основой профессиональных математических компетенций;
- развитие элементов алгоритмической культуры, пространственных представлений, интуиции, математического кругозора.

Перечисленные задачи, даже с учетом условного их разделения на три категории, предполагают комплексное решение в рамках предложенной программы.

## 3. Содержание программы

Дополнительная общеобразовательная дополнительная общеразвивающая программа «Математика: удивительный мир логики и творчества» рассчитана на учащихся 11-14 лет (5–8 класс) и реализуется в течение 3лет:

- Первый год обучения: 11-12 лет (5-6 класс)
- Второй год обучения: 12-13 (6-7 класс)
- Третий год обучения: 13-14 (7-8 класс)

При реализации программы, в зависимости от возраста и степени математической подготовленности обучающихся к освоению программного содержания в каждой группе, существует возможность выбора одного из следующих стандартных учебных планов:

- Первый год обучения: 11-12 лет (5-6 класс)
  - Учебно-тематический план №1: 11 лет (5 класс)
  - Учебно-тематический план №2: 11-12 лет (5-6 класс)
  - Учебно-тематический план №3: 12 лет (6 класс)
- Второй год обучения: 12-13 лет (6-7 класс)
  - Учебно-тематический план №1: 12 лет (6 класс)
  - Учебно-тематический план №2: 12-13 лет (6-7 класс)
  - Учебно-тематический план №3: 13 лет (7 класс)
- Третий год обучения: 7-8 класс

- Учебно-тематический план №1: 13 лет (7 класс)
- Учебно-тематический план №2: 13-14 лет (7-8 класс)
- Учебно-тематический план №3: 14 лет (8 класс)

Предложенные варианты учебно-тематического плана содержат одинаковый набор основных разделов. Различия предложенных планов реализуются следующим образом:

– в структуре программы: учебные планы отличаются распределением времени, отведенного на освоение конкретных тематических разделов (и, как следствие, в разбиении тематических разделов на учебные модули);
– в структуре разделов учебного плана: в зависимости от возраста обучающихся и текущего уровня математической подготовки, можно регулировать общую структуру разделов учебного плана (какие именно подразделы будут рассматриваться с обучающимися, а какие можно исключить, на затрагивая общей структуры учебно-тематического плана);
– в содержании разделов учебного плана: задачи и учебные примеры подбираются педагогом в зависимости от текущего уровня математической подготовки и/или возраста обучающихся

Разделение обучающихся по возрасту носит достаточно условный характер: предполагается, что в том случае, если учебная группа состоит полностью или почти полностью из более младших школьников (например, на втором году обучения – из шестиклассников), то выбирается первый вариант учебно-тематического плана, если преимущественно из более старших школьников – третий вариант, если в группе нет явного преимущества между количеством школьников разного возраста – компромиссный второй вариант плана.

Кроме того, при выборе одного из возможных учебно-тематических планов педагогом обязательно учитывается начальный уровень математической подготовленности учебной группы в целом (например, в первый год обучения объективно сильная группа пятиклассников вполне может заниматься по второму или третьему варианту плана, а для отдельных групп шестиклассников в тот же год обучения можно выбрать первый вариант учебно-тематического плана).

Вариативность образовательной программы достигается подбором варианта учебного плана (при этом допустимо разрабатывать и адаптированный вариант плана, самостоятельно варьируя количество часов, отведенных на каждый конкретный тематический раздел), а также адаптируя уровень подачи материала и изучения тематических разделов, в том числе за счет выбора уровня и содержания предлагаемых задач.

## Тематические разделы

Тематические разделы, освоение которых предполагается в рамках реализации трёхгодичной программы обучения.

### Первый год обучения

Программа первого года обучения предполагает изучение следующих основных тематических разделов:

1. Общие принципы решения математических задач

   Обсуждаются основные идеи, подходы, методы и принципы решения математических задач: предположения, перебор вариантов, логический вывод, получение противоречия и идея доказательства от противного, примеры и контрпримеры.

2. Логика

   На примере логических задач предлагаются основные свойства высказываний и операций над ними (элементы алгебры логики).

3. Четность и чередование

Изучаются различные идеи явного или неявного использования чётности или нечётности количества объектов: чередование, разбиение на пары, применение свойств чётных и нечётных чисел.

4. Делимость и остатки

Основные свойства делимости чисел, разложение чисел на множители, простые и составные числа, делители чисел, общие делители, деление с остатком и свойства остатков.

5. Принцип Дирихле

Идея использования принципа Дирихле: общее представление, расширенная формулировка, доказательства, применение в арифметических и комбинаторных задачах.

6. Клетчатые доски и таблицы

Рассматриваются задачи разного рода, в которых объекты (числа, фишки, клетки) размещаются в таблицах или на клетчатых досках. Применяются общие принципы решения математических задач.

7. Алгоритмы и операции

Решаются задачи на взвешивание, переливание, перемещение и прочие задачи, в которых необходимо предложить последовательность операций для достижения заданного результата.

8. Множества и основы комбинаторики

Вводятся основные понятия теории множеств: множества, описания множеств, операции над ними, свойства операций. Вводится теоретико-множественная нотация. Обсуждаются общие идеи подсчета элементов множеств: полный перебор, упорядочение перебора, деревья вариантов, правила сложения и умножения вариантов.

9. Введение в геометрию

Разрезание и составление фигур, перекладывание спичек и других объектов. Длины, расстояния, площади.

10. Математические соревнования

Ознакомление с правилами математического аукциона, математического хоккея, карусели, регаты. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров. Проведение соревнований.

**Второй год обучения**

Программа второго года обучения предполагает изучение следующих основных тематических разделов:

1. Общие принципы решения математических задач

Актуализируется понимание основных идей, подходов, методов и принципов решения математических задач: логический вывод, перебор вариантов, примеры и контрпримеры, выдвижение предположений и получение противоречия, метод доказательства от противного.

2. Текстовые задачи

Рассматриваются текстовые задачи без явно выраженной общей идеи. Применяются общие принципы решения математических задач.

3. Логика

Закрепление основных принципов решения математических задач на примере логических заданий, изучение логических операций (в рамках алгебры высказываний).

4. Основы теории чисел: делимость и остатки

Свойства делимости чисел, разложение чисел на множители, простые и составные числа, совершенные числа, общие делители, НОД и НОК, свойства остатков от деления и арифметические операции над остатками. Введение в системы счисления.

5. Арифметические неравенства

Обсуждение свойств арифметических неравенств, операций над неравенствами. Решение задач на доказательство неравенств.

6. Принцип Дирихле

Актуализация основных идей применения принципа Дирихле при решении математических задач. Решение задач из арифметики, алгебры, теории чисел, комбинаторики с помощью принципа Дирихле.

7. Теория игр

Повторяются основные идеи, используемые в игровых задачах: понятие антагонистической игры, хода, выигрышной позиции, стратегии. Предлагаются подходы к поиску выигрышных стратегий: различные варианты симметричных стратегий, анализ выигрышных позиций, метод анализа с конца при поиске выигрышных позиций.

8. Основы теории графов

Вводится понятие графа как математической модели объектов, рассматриваемых в задаче, и связей между этими объектами. Обсуждаются основные понятия теории графов.

9. Комбинаторика

Повторение основных комбинаторных методов: полный перебор, построение дерева вариантов, упорядочение перебора, вариантов, правила сложения и умножения вариантов. Введение в стандартные комбинаторные схемы выбора (подсчета): перестановки, размещения и сочетания без повторений.

10. Введение в геометрию

Длины, расстояния, площади. Неравенство треугольника.

11. Инвариант

Повторение понятия инварианта. Инварианты, связанные с четностью и делимостью, знакопостоянством и знакочередуемостью, с раскраской и разбиением на группы.

12. Математические соревнования

Участие в командных и личных математических соревнованиях: математическом аукционе, математическом хоккее, карусели, регате, абаке. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.

**Третий год обучения**

1. Общие принципы решения математических задач

   Актуализируется понимание основных методов и принципов решения математических задач: логический вывод, перебор вариантов, примеры и контрпримеры, доказательство от противного. Отдельные методы, изученные ранее (к примеру, принцип Дирихле, принцип крайнего) рассматриваются как универсальные подходы к решению математических задач.

2. Алгебра.

   Преобразование алгебраических выражений, доказательство тождеств. Решение алгебраических уравнений различными методами (разложение на множители, замена переменной, выделение полного квадрата).

3. Теория чисел

   Свойства делимости чисел, свойства остатков от деления и арифметические операции над остатками, общие делители, НОД и НОК, алгоритм Евклида, системы счисления, уравнения в целых числах.

4. Текстовые задачи

   Рассматриваются различные текстовые задачи (в том числе без явно выраженной общей идеи). Применяются общие принципы решения математических задач. Особо выделяются текстовые задачи на средние значения и задачи на проценты.

5. Неравенства.

   Повторяются основные свойства числовых неравенств. Знания свойств закрепляются при доказательстве неравенств. Рассматриваются задачи на преобразование алгебраических выражений (группировка, разложение на множители) для доказательства неравенств.

6. Геометрия

Основные геометрические объекты и свойства: неравенство треугольника, признаки равенства треугольника, свойства треугольника и параллелограмма, площади. Применение дополнительных построений в решении задач.

7. Комбинаторика

Повторение основных комбинаторных методов: полный перебор, дерево вариантов, правила сложения и умножения вариантов. Сочетания без повторений, размещения с повторениями и без повторений, перестановки. Свойства биномиальных коэффициентов.

8. Теория графов

Повторение основные понятий теории графов. Основные объекты и понятия: вершины, ребра, степени вершин, пути и циклы. Изоморфизм графов. Теорема Эйлера о существовании обхода графа. Деревья и их свойства.

9. Метод математической индукции

Введение в математическую индукцию: от последовательного конструирования до индукционного перехода. Классическая схема математической индукции. Применение метода математической индукции для доказательства тождеств и неравенств. Индукция в графах.

10. Математические соревнования

Участие в командных и личных математических соревнованиях: математическом аукционе, математическом хоккее, карусели, регате, абаке, крестиках-ноликах, домино. Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.

### 3.1. Учебно-тематический план первого года обучения

Разделы учебно-тематического плана первого года обучения разделяются на подразделы (учебные модули) и распределяются по учебному плану в зависимости от выбора текущего варианта образовательной траектории.

### 3.1.1. Учебно-тематический план №1 (5 класс) первого года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 2. | Логика: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 3. | Четность и чередование: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 4. | Принцип Дирихле: модуль 1 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 5. | Клетчатые доски и таблицы | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, математическое соревнование |
| 6. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 7. | Алгоритмы и операции: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 8. | Множества и основы комбинаторики: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 9. | Общие принципы решения математических задач: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Введение в геометрию: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 11. | Логика: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 12. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 13. | Четность и чередование: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 14. | Общие принципы решения математических задач: модуль 3 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 15. | Делимость и остатки | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 16. | Принцип Дирихле: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 17. | Множества и основы комбинаторики: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 18. | Математические соревнования: модуль 3 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 19. | Введение в геометрию: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 20. | Общие принципы решения математических задач: модуль 4 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 21. | Алгоритмы и операции: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 22. | Математические соревнования: модуль 4 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| | **ИТОГО** | **72** | **22** | **50** | |

### 3.1.2. Учебно-тематический план №2 (5-6 класс) первого года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 2. | Логика: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 3. | Четность и чередование: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 4. | Принцип Дирихле: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 5. | Клетчатые доски и таблицы | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах |
| 6. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 7. | Алгоритмы и операции: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 8. | Делимость и остатки: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 9. | Множества и основы комбинаторики: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Общие принципы решения математических задач: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 11. | Введение в геометрию: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 12. | Логика: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный опрос, обсуждение |
| 13. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 14. | Четность и чередование: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 15. | Принцип Дирихле: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 16. | Делимость и остатки: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 17. | Математические соревнования: модуль 3 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 18. | Множества и основы комбинаторики: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 19. | Общие принципы решения математических задач: модуль 3 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 20. | Введение в геометрию: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 21. | Алгоритмы и операции: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Работа в группах, обсуждение |
| 22. | Математические соревнования: модуль 4 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| | **ИТОГО** | **72** | **22** | **50** | |

### 3.1.3. Учебно-тематический план №3 (6 класс) первого года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теори я | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 2. | Логика: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 3. | Четность и чередование | 4 | 1 | 3 | Контрольная работа, командное математическое соревнование |
| 4. | Делимость и остатки: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 5. | Принцип Дирихле: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 6. | Клетчатые доски и таблицы: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Индивидуальный опрос, работа в группах |
| 7. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 8. | Алгоритмы и операции: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Индивидуальный опрос |
| 9. | Множества и основы комбинаторики: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Общие принципы решения математических задач: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 11. | Делимость и остатки: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 12. | Введение в геометрию: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 13. | Логика: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный опрос, обсуждение |
| 14. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 15. | Принцип Дирихле: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 16. | Делимость и остатки: модуль 3 | 4 | 1 | 3 | Индивидуальный опрос |
| 17. | Множества и основы комбинаторики: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 18. | Алгоритмы и операции: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Работа в группах, обсуждение |
| 19. | Клетчатые доски и таблицы: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Индивидуальный опрос, работа в группах |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теори я | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 20. | Введение в геометрию: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 21. | Математические соревнования: модуль 3 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| | **ИТОГО** | **72** | **22** | **50** | |

## 3.2. Учебно-тематический план второго года обучения

Аналогично предыдущему году обучения, разделы учебно-тематического плана разделяются на подразделы (учебные модули) и распределяются по нему в зависимости от выбора образовательной траектории.

Выбор конкретной реализации учебно-тематического плана может быть обусловлен вариантом образовательной траектории первого года обучения, однако может быть перестроен в соответствии с изменениями в составе учебной группы или по итогам образовательных результатов освоения программного материала предыдущего учебного года.

### 3.2.1. Учебно-тематический план №1 (6 класс) второго года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак -тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 2. | Текстовые задачи: модуль 1 | 4 | 0 | 4 | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа |
| 3. | Логика | 4 | 1 | 3 | Индивидуальный опрос, обсуждение |
| 4. | Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 5. | Арифметические неравенства | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 6. | Принцип Дирихле: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак -тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 7. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 8. | Теория игр: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 9. | Основы теории графов: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Комбинаторика: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 11. | Инвариант | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 12. | Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Проверочная работа |
| 13. | Принцип Дирихле: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 14. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 15. | Комбинаторика: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 16. | Текстовые задачи: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Проверочная работа |
| 17. | Основы теории графов: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, поверочная работа |
| 18. | Теория игр: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 19. | Введение в геометрию | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 20. | Математические соревнования: модуль 3 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| | **ИТОГО** | **72** | **22** | **50** | |

### 3.2.2. Учебно-тематический план №2 (6-7 класс) второго года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак -тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак -тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 2. | Текстовые задачи: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа |
| 3. | Логика | 4 | 1 | 3 | Индивидуальный опрос, обсуждение |
| 4. | Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 5. | Арифметические неравенства | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 6. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 7. | Принцип Дирихле: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 8. | Теория игр: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 9. | Основы теории графов: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Комбинаторика: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 11. | Инвариант | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 12. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 13. | Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Проверочная работа |
| 14. | Принцип Дирихле: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 15. | Комбинаторика: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 16. | Текстовые задачи: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Проверочная работа |
| 17. | Основы теории графов: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, поверочная работа |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 18. | Теория игр: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 19. | Введение в геометрию | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 20. | Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 3 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, поверочная работа |
| 21. | Математические соревнования: модуль 3 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| | **ИТОГО** | **72** | **20** | **52** | |

### 3.2.3. Учебно-тематический план №3 (7 класс) второго года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 2. | Текстовые задачи | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа |
| 3. | Логика | 2 | 1 | 1 | Индивидуальный опрос, обсуждение |
| 4. | Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 5. | Арифметические неравенства: модуль 1 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 6. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 7. | Принцип Дирихле: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 8. | Теория игр: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 9. | Основы теории графов: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Комбинаторика: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |

| №<br>п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 11. | Инвариант | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 12. | Введение в геометрию: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 13. | Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Проверочная работа |
| 14. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 15. | Принцип Дирихле: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 16. | Комбинаторика: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 17. | Основы теории графов: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, поверочная работа |
| 18. | Арифметические неравенства: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Проверочная работа |
| 19. | Теория игр: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 20. | Введение в геометрию: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 21. | Комбинаторика: модуль 3 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 22. | Основы теории чисел: делимость и остатки: модуль 3 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, поверочная работа |
| 23. | Математические соревнования: модуль 3 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| **ИТОГО** | | **72** | **18** | **4** | |

## 3.3. Учебно-тематический план третьего года обучения

Общая структура учебно-тематического плана третьего года обучения остаётся без изменений: разделы учебно-тематического плана разбиты на подразделы (учебные модули) и распределены в зависимости от выбора конкретного варианта образовательной траектории. Выбор конкретной реализации учебно-тематического плана может быть обусловлен вариантом образовательных траекторий первого и второго года обучения, появлением новых обучающихся (не проходивших обучения по программе ранее), а также в соответствии с успешностью освоения образовательной программы предыдущего учебного года на выбранном уровне обучения.

### 3.3.1. Учебно-тематический план №1 (7 класс) третьего года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач: часть 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 2. | Текстовые задачи: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа |
| 3. | Теория чисел: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Индивидуальный опрос, обсуждение |
| 4. | Комбинаторика: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 5. | Геометрия: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 6. | Алгебра: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 7. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 8. | Текстовые задачи: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 9. | Неравенства: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Теория графов: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 11. | Теория чисел: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 12. | Комбинаторика: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Проверочная работа |
| 13. | Метод математической индукции: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 14. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 15. | Неравенства: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 16. | Геометрия: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Проверочная работа |
| 17. | Общие принципы решения математических задач: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, поверочная работа |
| 18. | Теория графов: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 19. | Метод математической индукции: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 20. | Математические соревнования: модуль 3 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| **ИТОГО** | | **72** | **26** | **46** | |

### 3.3.2. Учебно-тематический план №2 (7-8 класс) третьего года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теория | Прак-тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач: часть 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 2. | Текстовые задачи: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа |
| 3. | Теория чисел: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Индивидуальный опрос, обсуждение |
| 4. | Геометрия: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 5. | Комбинаторика: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 6. | Алгебра: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 7. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 8. | Неравенства: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Теори я | Прак -тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 9. | Теория графов: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Метод математической индукции: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 11. | Теория чисел: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 12. | Комбинаторика: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Проверочная работа |
| 13. | Геометрия: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 14. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 15. | Неравенства: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 16. | Текстовые задачи: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Проверочная работа |
| 17. | Теория графов: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, поверочная работа |
| 18. | Метод математической индукции: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 19. | Теория чисел: модуль 3 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 20. | Математические соревнования: модуль 3 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| **ИТОГО** | | **72** | **24** | **48** | |

### 3.3.3. Учебно-тематический план №3 (8 класс) третьего года обучения

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Лекции | Прак -тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 1. | Общие принципы решения математических задач | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 2. | Текстовые задачи | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, проверочная работа |
| 3. | Теория чисел: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Индивидуальный опрос, обсуждение |
| 4. | Алгебра: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |

| № п/п | Название раздела или модуля | Всего | Лекции | Прак -тика | Формы контроля |
|---|---|---|---|---|---|
| 5. | Комбинаторика: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 6. | Геометрия: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 7. | Математические соревнования: модуль 1 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 8. | Теория графов: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 9. | Метод математической индукции: модуль 1 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 10. | Неравенства: модуль 1 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 11. | Теория чисел: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 12. | Комбинаторика: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Проверочная работа |
| 13. | Геометрия: модуль 2 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный и индивидуальный опрос |
| 14. | Математические соревнования: модуль 2 | 2 | 0 | 2 | Математическое соревнование |
| 15. | Неравенства: модуль 2 | 2 | 1 | 1 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 16. | Теория графов: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Проверочная работа |
| 17. | Метод математической индукции: модуль 2 | 4 | 2 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, поверочная работа |
| 18. | Теория чисел: модуль 3 | 4 | 1 | 3 | Фронтальный опрос, работа в группах, обсуждение |
| 19. | Геометрия: модуль 3 | 2 | 0 | 2 | Фронтальный и индивидуальный опрос, обсуждение |
| 20. | Математические соревнования: модуль 3 | 4 | 0 | 4 | Математическое соревнование |
| **ИТОГО** | | **72** | **20** | **52** | |

## 3.4. Содержание учебного плана

### *3.4.1. Содержание учебно-тематического плана первого года обучения*

*Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач*

Содержание раздела:

- Ситуации, их анализ.
- Логический вывод.
- Предположения, метод от противного.
- Перебор возможностей.
- Примеры и контрпримеры.

Обучающиеся знакомятся с основными (общими) принципами решения математических задач, осознают необходимость обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. В ходе лекционных занятий обучающиеся осваивают основные логические схемы рассуждения, закрепляя их при решении практических задач с устным изложением решений.

В ходе практических занятий обучающимся предлагаются задачи на полный перебор случаев, возможностей, комбинаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез. Общие принципы решения задач иллюстрируются при решении логических практических задач на работу с истинными и ложными высказываниями, утверждениями. Допускается рассмотрение текстовых задач, типичных (по структуре) для стандартного школьного курса – на движение, на работу, на подсчет объектов, – но с необычной формулировкой или возможной оригинальной идеей решения.

*Тематический раздел 2. Логика*

Содержание раздела:

- Высказывания, их истинность и ложность. Операции над высказываниями.

- Логический вывод, предположения, противоречия, метод от противного.
- Полный перебор возможностей.
- Метод предположений.
- Правила логического вывода.
- Упорядочение перебора вариантов: деревья вариантов, таблицы истинности.

Повторяются и обсуждаются общие принципы решения математических задач, подчеркивается необходимость обоснования математических утверждений, актуализируются понятия частного и общего случая, закрепляется понимание различий между доказательством и проверкой на частных примерах. Формируются навыки работы с основными логическими конструкциями, такими как следствие, равносильность, необходимость, достаточность, существование, всеобщность. Логические понятия, связки, схемы рассуждения, общие принципы решения задач и доказательств, полученные на лекционных занятиях, закрепляются при решении практических задач с устным или письменным изложением решений.

На практических занятиях предлагаются задачи на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез, полный перебор комбинаций истинности и ложности высказываний. Общие свойства операций над высказываниями и правила корректного логического вывода закрепляются при решении и обсуждении логических задач.

*Тематический раздел 3. Четность и чередование*

Содержание раздела:

- Чередование.
- Четные и нечетные числа.
- Свойства четных и нечетных чисел.
- Разбиение на пары, соответствия.

Изучаются простейшие свойства делимости (на примере делимости на 2), понятие четности рассматривается на наглядных примерах (как способность к разбиению на пары, возможность чередования элементов). Обсуждаются свойства четных и нечетных чисел (сумма двух чисел одинаковой четности четна, сумма двух чисел разной четности нечетна, произведение четно тогда и только тогда, когда четным является один из множителей; переход к более сложным свойствам – четность или нечетность суммы нечетного количества нечетных слагаемых, обобщенные понятия – числа одинаковой и разной четности).

Знание свойств закрепляется при решении задач на соответствия, на разбиения на пары, на чередования. Разбираются простейшие задачи на раскраску, на разбиение чисел. В ходе решения и обсуждения задач закрепляется понимание разницы между частными и общими случаями, примером и доказательством.

*Тематический раздел 4. Делимость и остатки*

Содержание раздела:

– Делимость и делители, кратность.
– Простые и составные числа.
– Разложение на простые множители.
– Общие делители, взаимно простые числа.
– Признаки делимости на 2, 3, 4, 5, 6, 9, 10.

В ходе занятий по данной теме обучающиеся исследуют основные свойства делимости (арифметические свойства делимости на одно число – сумма и разность чисел одинаковой одномодульной делимости, произведение, в котором один из множителей делится на данное число), закрепляется навык поиска делителей натурального числа, исследуются основные свойства простых и составных чисел, делимости на простое число.

При решении задач развиваются навыки поиска общих делителей чисел, приобретаются умения использования разложения на простые множители для анализа делимости чисел (поиска делителей, в 6 классе можно уделить внимание поиску общих делителей, общих кратных). Обучающиеся повторяют простейшие признаки делимости, закрепляют навык их использования для эффективного поиска делителей числа и разложения натурального числа на простые множители.

В группе обучающихся 12 лет (6 класс) можно уделить внимание основной теореме арифметики о существовании и единственности разложения числа на простые множители, продемонстрировать ее применение при решении задач на доказательство (для обучающихся 11 лет (5 класс) достаточно будет просто ее сформулировать и проиллюстрировать на примере задач). Осваивается умение обоснования признаков делимости на различные числа, формируются навыки поиска контрпримеров к неверным признакам. Полученные навыки закрепляются при решении практических задач.

*Тематический раздел 5. Принцип Дирихле*

Содержание раздела:

- Принцип Дирихле: общее представление.
- Обобщенный вариант принципа Дирихле.
- Принцип Дирихле в арифметических задачах.

Обучающиеся получают представление о простом и обобщенном принципе Дирихле, отрабатывают умение преобразовывать интуитивные предпосылки в форму строгого математического доказательства. Дополнительно повторяются общие методы и схемы доказательств: доказательство от противного, оценка и пример; обсуждаются возможности неконструктивных доказательств существования объектов (на примере решения задач на доказательство существования чисел с определенными свойствами), развивается умение различать условие задачи (посылку) и заключение (вывод), формируется понимание отличие интуитивных выводов и суждений от строгих доказательств. В ходе изучения данной темы повторяются свойства делимости и остатков, которые органично используются как этапы доказательств и решений задач.

*Тематический раздел 6. Клетчатые доски и таблицы*

Содержание раздела:

- Примеры и контрпримеры в таблицах.
- Задачи на оптимизацию на клетчатых досках.
- Комбинаторные задачи на клетчатых досках.
- Идеи инвариантов для клетчатых досок и таблиц.

Рассматривается набор математических задач, в которых объекты (числа, метки, фишки или знаки) располагаются в ячейках таблицы или в полях клетчатой доски. На примере таблиц и клетчатых досок рассматриваются различные оптимизационные задачи (например, нахождение максимального или минимального количества фишек или каких-либо иных объектов, при котором выполняется некоторое заданное свойство) – при этом рассматриваются примеры задач на построение точных оценок (задачи типа «оценка плюс пример» – синтез логического обоснования и конструирования). Допустимо рассмотреть различные варианты расположения шахматных фигур или новых фигур, «по мотивам шахматных».

Также в группах 5-6 или 6 классов на примере некоторых задач с таблицами и досками возможно рассмотрение некоторой разновидности идеи инварианта – независимости значения некоторой величины от способа подсчета (например, по строкам и столбцам), а также ознакомить с идеей окраски таблиц и клетчатых досок для рассмотрения простейших инвариантов, связанных с окраской.

*Тематический раздел 7. Алгоритмы и операции*

*Содержание раздела:*

- Задачи на взвешивание.
- Задачи на переливание.
- Процессы и операции.

Обучающиеся на примере алгоритмических задач на взвешивание и переливание приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. На примере заданий на построение наиболее оптимального (по количеству действий) алгоритма рассматриваются идеи сравнения трудоемкости алгоритмов, важные при дальнейшем изучении информатики и программирования. В том случае, если обучающиеся уже рассмотрели до этого идеи инвариантов (в соответствующем тематическом учебном модуле), допускается изучение возможности или невозможности получения необходимого результата с помощью допустимых операций.

*Тематический раздел 8. Множества и основы комбинаторики*

Содержание раздела:

- Понятие множества. Элементы множества.
- Задание множеств. Равенство множеств.
- Теоретико-множественная нотация.
- Объединение, пересечение, дополнение множеств.
- Диаграммы Эйлера-Венна.
- Понятие варианта, комбинации, основные способы их перебора.
- Дерево возможных вариантов.
- Правила сложения и умножения вариантов.

Обучающимся вводится понятие множества, описываются общие свойства множеств, возможные варианты задания (описания) множеств, вводятся основные операции над множествами. Допустимо (особенно в группах шестиклассников) отдельно сделать упор на формальном способе записи множеств и операций над ними (теоретико-множественная нотация). В качестве наглядной иллюстрации введенных понятий используются диаграммы Эйлера-Венна; обучающиеся самостоятельно строят такие диаграммы при решении задач на подсчет элементов в множествах.

При изучении данного раздела (в части, относящейся к основам теории множеств) обучающимся вводятся те понятия, которые в дальнейшем используются практически во всех разделах математики. В практической части данного тематического раздела обучающимся демонстрируется необходимость полного рассмотрения вариантов в переборных задачах, обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций. Обсуждаются способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения. Особое внимание удаляется изучению правил сложения и умножения вероятностей, формируется умения правильно применять данные законы, что закрепляется при решении практических задач.

*Тематический раздел 9. Введение в геометрию*

Содержание темы:

- Основные геометрические понятия.
- Разрезания. Равносоставленность фигур.
- Длины, расстояния, площади.
- Неравенство треугольника.

Обучающиеся кратко, во многом на интуитивном уровне, знакомятся с некоторыми геометрическими понятиями и свойствами. При решении задач на разрезание обучающиеся по большей части работают самостоятельно, задачи предлагаются в порядке последовательного усложнения. Сравнение площадей многоугольников рассматривается с помощью идеи равносоставленности.

Неравенство треугольника иллюстрируется интуитивной геометрической интерпретацией («путь по прямой короче, чем по ломаной (не по прямой)»). Возможно решение оптимизационных задач с использованием неравенства треугольника, в этом случае особое внимание уделяется наличию в решении двух обязательных составляющих: оценки и примера.

*Тематический раздел 10. Математические соревнования*

Содержание темы:

- Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абаки.
- Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.
- Проведение соревнований.

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Обучающиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

### *3.4.2. Содержание учебно-тематического плана второго года обучения*

*Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач*

Содержание раздела:

- Полный перебор возможностей.
- Примеры и контрпримеры.
- Предположения, получение противоречия.
- Метод доказательства от противного.

Обучающиеся повторяют общие (общематематические) принципы решения математических задач, закрепляют понимание важности обоснования математических утверждений, приобретают опыт образного и предметно-манипулятивного конструирования. Большое внимание уделяется решению задач на перебор случаев (ситуаций), выдвижение предположений, логический вывод и приведение к противоречию. Предлагаются задачи на полный перебор ситуаций, на конструирование примеров и контрпримеров, на логический вывод и логическое обоснование выдвигаемых гипотез.

*Тематический раздел 2. Текстовые задачи*

Содержание раздела:

– Текстовые задачи на движение.
– Текстовые задачи на работу.
– Текстовые задачи на процессы и операции.

Данный раздел во многом дополняет повторение общих принципов решения задач: предлагаются задачи без явно выраженной общей идеи решения, в которых применяются общематематические идеи, методы, подходы. На занятиях с обучающимися 12 лет (6 класс) или в группах с большим количеством новых участников рекомендуется рассмотрение текстовых задач, типичных (по структуре) для стандартного школьного курса – на движение, на работу, на подсчет объектов. В любом случае минимизировать количество задач, в которых предполагается совершенно стандартный ход или алгоритм решения.

*Тематический раздел 3. Логика*

Содержание раздела:

– Логический вывод, предположения, противоречия, метод от противного.
– Операции над высказываниями, свойства операций.
– Правила логического вывода.
– Упорядочение перебора вариантов: деревья вариантов, таблицы истинности.

Повторяются основные приемы работы с логическими конструкциями, такими как следствие, равносильность, необходимость, достаточность, существование, всеобщность. Логические понятия, связки, схемы рассуждения, общие принципы решения задач и доказательств, изученные ранее, закрепляются при решении практических задач. Рекомендуется большее внимание (по сравнению с изучением аналогичной темы в предыдущем учебном году) уделить письменному изложению решений. Правила корректного логического вывода закрепляются при решении и обсуждении логических задач. Группам, обучающимся по вариантам тематического плана №2 и №3, можно формально изложить основные положения алгебры логики, но без какого-либо упора на терминологию: на примерах показать, как условие задачи переводится на формальный логический язык, продемонстрировать операции над высказываниями (конъюнкция, дизъюнкция, отрицание), обсудить их свойства, показать способы обоснования логических утверждений и упорядочения перебора вариантов (построение таблицы истинности).

*Тематический раздел 4. Основы теории чисел: делимость и остатки*

Содержание раздела:

– Делимость и делители, кратность.
– Простые и составные числа. Разложение на простые множители.
– Основная теорема арифметики.
– Общие делители. Взаимно простые числа.
– Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное. Алгоритм Евклида.
– Остатки от деления. Арифметические свойства остатков.
– Основы систем счисления.

Обучающиеся повторяют основные понятия, связанные с делимостью целых чисел, закрепляют понимание базовых свойств делимости. Особое внимание обращается на разложение составных чисел на простые множители, на основную теорему арифметики (о существовании и единственности разложения на простые множители). В старших группах (в первую очередь обучающимся по варианту тематического плана №3) можно предложить основную идею строгого доказательства данной теоремы, а также продемонстрировать, как из неё вытекают основные свойства делимости.

При решении задач обучающиеся повторяют простейшие признаки делимости, закрепляют навык их использования для эффективного поиска делителей числа и разложения натурального числа на простые множители. Закрепляются навыки поиска общих делителей чисел, предлагается алгоритм Евклида для нахождения НОД, в группе семиклассников желательно провести строгое обоснование алгоритма.

Свойства остатков сначала демонстрируются на арифметических примерах, после этого важно провести строгое доказательство используемых свойств, на их примере также продемонстрировав и структуру доказательства теоретико-числовых свойств, и способ записи доказательств. Также важно уделить внимание свойству цикличности остатков при возведении целых чисел в степень, а также изучению свойств остатков от деления квадратов, кубов и других степеней натуральных чисел на 3, 4 и прочие делители.

С группой обучающихся 13 лет (7 класс) также допустимо рассмотреть основные понятия, связанные с позиционными системами счисления, предложить один из возможных алгоритмов перевода чисел из десятичной системы счисления в другую позиционную систему счисления и обратно.

*Тематический раздел 5. Арифметические неравенства*

Содержание раздела:

- Сравнение чисел.
- Числовые неравенства, их основные свойства.

На примере задач на сравнение целых чисел и арифметических выражений обучающимся демонстрируются основные свойства алгебраических неравенств (в первую очередь транзитивность, а также возможность складывать или перемножать неравенства при соблюдении некоторых условий). При изучении свойств неравенств полезно также продемонстрировать или попросить учащихся построить контрпримеры, показывающие недопустимость переноса некоторых свойств равенств на неравенства (например, для демонстрации недопустимости вычитания неравенств), а также невыполнимость некоторых арифметических свойств неравенств при неполном соблюдении условий для выполнения соответствующего свойства.

*Тематический раздел 6. Принцип Дирихле*

Содержание раздела:

- Принцип Дирихле в арифметических задачах.
- Принцип Дирихле в комбинаторных задачах.
- Принцип Дирихле в теории чисел.

При изучении (повторении) данной темы рекомендуется упор сделать в первую очередь на решении задач и обсуждении особенностей применения принципа Дирихле (если этого не сделали обучающиеся, то после предоставленного решения обсудить, что в конкретном решении задачи является «кроликами», а что – «клетками»). При решении арифметических и теоретико-числовых задач с использованием принципа Дирихле повторяются свойства делимости и остатков, которые органично используются как этапы доказательств и решений задач.

*Тематический раздел 7. Теория игр*

Содержание раздела:

- Стратегии, выигрышная стратегия, правильная игра.
- Игры на клетчатой доске.
- Симметричные стратегии.
- Выигрышные позиции, поиск и анализ выигрышных позиций с конца.

Обучающиеся по предыдущему году обучения уже знакомы с понятием математической антагонистической игры, выигрышной стратегии, правильной игры. Поэтому при работе с данным тематическим разделом приоритетнее уделить особое внимание изучению методов целенаправленного поиска выигрышных стратегий.

В первую очередь рассматривается серия задач на поиск симметричных стратегий (как в прямом – геометрическом – смысле, так и в переносном – в виде дополнения объектов до определенного количества). Интересно обратить внимание на задачи, где при незначительном изменении условия перестает работать уже найденная симметричная стратегия, зато возникает другой вид симметрии и соответствующая выигрышная стратегия. Особенно важно обращать внимание обучающихся на необходимость обоснования двух важных составных частей найденной стратегии: возможности для игрока действительно совершать ходы, предусмотренные выбранной стратегией (избегая при этом ошибки, когда соперник неявно «подыгрывает» игроку, возможно мотивируя это «наиболее удобным» вариантом сделать ответный ход).

В качестве достаточно универсального средства поиска выигрышных стратегий следует обратить внимание обучающихся на понятие выигрышной позиции и метод анализа выигрышных «с конца». Наиболее наглядно данный метод демонстрируется на примере игровых задач на шахматной доске.

*Тематический раздел 8. Основы теории графов*

Содержание раздела:

- Графы как математическая модель.
- Основные понятия теории графов.
- Связность графов, компоненты связности.
- Степени вершин и закономерности, связанные с ними.

Обсуждается эффективность представления связанной с задачей системы в схематической форме с помощью графов. На примерах иллюстрируется способ представления объектов задачи и взаимосвязей между ними в виде вершин и ребер графа, обсуждается возможность существования общих способов решения конкретных задач при их интерпретации в виде графовых моделей.

Вводятся основные определения теории графов (вершины, ребра, смежность, инцидентность, путь). Введенные понятия развернуто иллюстрируются на конкретных примерах, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов.

*Тематический раздел 9. Комбинаторика*

Содержание раздела:

– Основные правила подсчета количества комбинаций.
– Схемы комбинаторного выбора: перестановки, размещения, сочетания.
– Свойства перестановок и сочетаний.

Обучающимся демонстрируется необходимость полного рассмотрения вариантов в переборных задачах, обсуждаются общие черты некоторых переборных задач и задач на подсчет количества комбинаций. Обсуждаются способы подсчета комбинаций без их непосредственного нахождения.

Особое внимание удаляется изучению правил сложения и умножения вероятностей, формируется умения правильно применять данные законы. Способ подсчета перестановок предварительно демонстрируется на простейших задачах с использованием полного перебора, после чего на задачах с большим количеством элементов обсуждается неконструктивный способ подсчета количества комбинаций, в результате выводится общая формула подсчета количества перестановок, навык использования которой закрепляется при решении задач. Старшим (обучающимся по варианту плана №3) рекомендуется также дать общее представление о размещениях и сочетаниях (со строгим выводом формул и комбинаторным обоснованием их основных свойств).

*Тематический раздел 10. Введение в геометрию*

Содержание темы:

- Длины, расстояния, площади.
- Неравенство треугольника.

Для групп, занимающиеся по учебно-тематическому плану №1 при повторении данной темы могут поработать с задачами на разрезание, на понятие равновеликих и равносоставленных фигур (при этом полезно ознакомить обучающихся с методом сравнения площадей плоских фигур с помощью идей равносоставленности). Для групп, занимающихся по тематическим планам №2 и №3 полезнее обратить особое внимание на геометрические задачи, доказательство в которых производится с помощью неравенства треугольника. Семиклассникам во второй половине учебного года при изучении данной темы рекомендуется предлагать геометрические задач и на более широкий спектр геометрических методов.

*Тематический раздел 11. Инвариант*

Содержание темы:

- Инварианты, связанные с четностью, делимостью и остатками.
- Инварианты, связанные с раскраской и разбиениями на группы.

Повторяется основная идея доказательства математических утверждений с помощью инвариантов, закрепляется навык поиска инвариантов в изменяющейся системе, выбора из них необходимого для решения поставленной задачи. Решение задач на инварианты, связанные с делимостью и остатками, также полезно для закрепления соответствующих понятий, свойств и закономерностей в тематическом блоке «Основы теории чисел». При решении задач на исследование инвариантов, связанных с раскраской, обучающиеся повторяют различные виды раскрасок и разбиения на группы (шахматные раскраски, раскраски в три или большее количество цветов, диагональные раскраски), приобретают опыт применения идеи инварианта в различных ситуациях.

В сильных группах можно явно или неявно ввести понятие полуинварианта (как монотонно меняющейся характеристики) с закреплением данного понятия через решение соответствующих задач.

*Тематический раздел 12. Математические соревнования*

Содержание темы:

- Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абаки.
- Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.
- Проведение соревнований.

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Обучающиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

### *3.4.3. Учебно-тематический план третьего года обучения*

*Тематический раздел 1. Общие принципы решения математических задач*

Содержание раздела:

- Примеры и контрпримеры. Задачи типа «оценка плюс пример».
- Принцип Дирихле.
- Введение в принцип крайнего.

Общематематические принципы применяются для решения широкого класса задач из различных разделов математики. Для закрепления навыков использования общих методов предлагаются задачи на перебор ситуаций, метод доказательства от противного, оптимизационные задачи типа «оценки плюс пример», сочетающие в себе обоснование ограничений и конструирование примеров.

Принцип Дирихле, изучаемый ранее в рамках самостоятельного тематического раздела, включается в число общематематических методов и применяется для широкого класса математических задач по алгебре, теории чисел, комбинаторики. Принцип крайнего, основанный на рассмотрении «крайних» объектов (самого большого или самого маленького числа из предложенного набора, наиболее удаленные точки, фигуру с самой большой площадью, человека с наибольшим числом знакомых, и так далее) сразу вводится как универсальный метод, которых может быть эффективно применен при решении задач различной тематики.

*Тематический раздел 2. Алгебра*

Содержание раздела:

- Доказательство тождеств.
- Решение уравнений: разложение на множители, замена переменной, выделение полного квадрата.

Этот тематический раздел, с одной стороны, является дополнительным к школьному курсу алгебры за 7 или за 7-8 класс, однако должен обеспечить необходимую техническую базу для других разделов программы 3 года обучения. Сформированный навык доказательства алгебраических тождеств в дальнейшем потребуется в ходе решения уравнений в целых числах, проведении индукционных переходов в разделе, посвященном математической индукции. Разложение на множители и выделение полного квадрата помимо этого будут основными инструментами при доказательстве числовых неравенств.

Также отметим, что данную тему удобно использовать как своеобразный переход от привычного изложения в рамках изучения школьной программы к разнообразным разделам дополнительной образовательной программы.

*Тематический раздел 3. Теория чисел*

Содержание раздела:

– Свойства остатков от деления. Арифметика остатков.
– Системы счисления.
– Наибольший общий делитель, алгоритм Евклида.
– Уравнения в целых числах.

Обучающиеся повторяют основные понятия, связанные с делимостью целых чисел, освоенные в течение первых двух лет обучения. Особое внимание следует уделить повторению свойств остатков при арифметических операциях над числами, уделяя особо внимание структуре доказательства теоретико-числовых свойств через перебор остатков, цикличность остатков при возведении в степень, а также с использованием свойств остатков от деления квадратов, кубов и других степеней натуральных чисел на 3, 4 и прочие делители. Удобно будет разобрать с учащимися способ записи доказательств данных свойств через построение таблиц остатков.

В том случае, если при освоении программы 2 года обучения с учащимися не разбиралась или разбиралась недостаточно подробно тема, связанная с позиционными системами счисления, будет полезно разобрать ее сейчас: разобрать особенности позиционных систем счисления, алгоритмы перевода чисел из десятичной системы счисления в другую позиционную систему счисления и обратно.

Закрепляются навыки поиска общих делителей чисел, предлагается алгоритм Евклида для нахождения НОД. Если в предыдущий год алгоритм Евклида не обосновывался, необходимо строго доказать его, продемонстрировав основные свойства общих делителей чисел. Со школьниками любого возраста будет интересно разобрать геометрическую интерпретацию алгоритма Евклида (нахождение наиболее длинного отрезка, укладывающегося целое число раз в два заданных). Навыки нахождения НОД с помощью алгоритма Евклида полезно закрепить решением задач на обоснование несократимости дробей заданного вида.

В качестве введения в основные методы решения уравнений в целых числах (равно как и в само понятие уравнения в целых числах) рекомендуется предложить метод разложения на множители и перебора делителей. Обоснование отсутствия решения уравнения в целых числах также можно продемонстрировать на примере анализа остатков от деления (например, через обоснование того, что левая и правая часть уравнения дают при делении на какое-то число разные множества остатков).

*Тематический раздел 4. Текстовые задачи*

Содержание раздела:

- Текстовые задачи на средние значения.
- Текстовые задачи на проценты.
- Текстовые задачи без общей идеи.

Данный раздел во многом дополняет повторение общих принципов решения задач, поэтому за счет проведения занятий по решению текстовых задач можно расширить соответствующий тематический раздел. В то же время рекомендуется уделить внимание решению задач на средние значения, иллюстрирующие различные трактовки (определения) средних, их общие и специфические свойства. Здесь же будет интересно рассмотреть задачи на движение, обращая внимание на особенности вычисления средней скорости при неравномерном движении. Текстовые задачи на проценты также могут быть связаны с темой «Теория чисел» – в том случае, если параметры задачи являются целыми числами, то решение иногда может быть сведено к рассмотрению уравнений в целых числах.

*Тематический раздел 5. Неравенства*

Содержание раздела:

- Числовые (арифметические) неравенства.
- Основные свойства неравенств.
- Разложение на множители для доказательства неравенств.
- Выделение полных квадратов для доказательства неравенств.

Основные свойства алгебраических неравенств (транзитивность, алгебраические свойства – условия, при которых сохраняются или меняются знаки неравенства при выполнении арифметических операций) будет удобно повторить на примере сравнения числовых арифметических выражений. Для доказательства алгебраических неравенств рекомендуется продемонстрировать подходы, связанные с разложением выражения на множители и перебором вариантов расстановки знаков. Восьмиклассникам и подготовленным семиклассникам будет полезно ознакомиться также с методом доказательства неравенств и нахождения наибольших/наименьших значений, основанным на выделении полного квадрата в алгебраическом выражении.

*Тематический раздел 6. Геометрия*

Содержание раздела:

- Неравенство треугольника.
- Признаки равенства треугольников.
- Свойства треугольника и параллелограмма.
- Дополнительные построения.
- Площади и её свойства.

Конкретный набор тематических подразделов при изучении геометрии на занятии математического объединения очень сильно зависит от возрастного состава соответствующей учебной группы. В группе обучающихся 13 лет (7 класс) в начале учебного года (первый модуль данного тематического блока) можно сделать упор на неравенстве треугольника, а в дальнейшем ориентироваться на текущую программу школьного курса планиметрии. В этом случае можно предлагать либо подразделы по уже пройденной в средней школе тематике, либо двигаясь с некоторым опережением (в этом случае необходимые факты можно предложить доказывать самостоятельно). В группах восьмиклассников большая часть необходимого фактического материала должна быть изучена на школьных уроках геометрии, поэтому таких явных требований к порядку тематических подразделов нет.

В любом случае необходимо сделать упор на строгих математических доказательствах свойств фигур (здесь уместнее будут задачи на доказательство, нежели на вычисление длин, площадей и углов). При доказательстве свойств на занятиях полезно вводить дополнительные ограничения на используемую фактологическую базу (например, предлагать задачи на доказательство, но не разрешать использовать признаки подобия). Также важное внимание следует уделить геометрической технике: закреплению навыков счёта углов, умений использовать свойства равных треугольников и замечательных линий треугольников.

*Тематический раздел 7. Комбинаторика*

Содержание раздела:

- Правила сложения и умножения вариантов.
- Классические комбинаторные схемы: сочетания без повторений, размещения с повторениями и без повторений, перестановки без повторений.
- Свойства биномиальных коэффициентов.
- Треугольник Паскаля.

В первую очередь необходимо повторить с обучающимися правила сложения и умножения вероятностей, в дальнейшем сделать упор на классических комбинаторных схемах. Если данный тематический раздел вызывает затруднения у обучающихся, изучение схем комбинаторного выбора необходимо предварить вычислением соответствующих комбинаций с помощью правила умножения или с помощью структурированного перебора. Например, при изучении размещений с повторениями или без повторений можно с помощью правила произведения решить несколько задач на нахождение количества способов выбора упорядоченного подмножества из заданного множества, а затем ввести общую формулу для числа размещений.

При введении формулы для числа сочетаний рекомендуется сначала вычислить количество соответствующих размещений (количество способов выбора упорядоченного набора) 2 или 3 элементов, а потом обсудить, какое лишнее количество раз при этом будет подсчитана каждая комбинация из выбранных элементов, если порядок теперь не учитывать. Аналогично и с остальными комбинаторными схемами.

Обоснование свойств биномиальных коэффициентов (чисел сочетаний) имеет смысл параллельно проводить доказательство двумя подходами: алгебраическим (используя явную формулу для числа сочетаний) и комбинаторным (рассматривая соответствующую формулу как количество способов выбора объектов определенным образом). Интересным приложением изученных свойств может быть описание построения треугольника Паскаля (школьникам также можно предложить сопоставить построенные элементы треугольника Паскаля с вычисленными по формуле).

*Тематический раздел 8. Теория графов*

Содержание раздела:

- Основные понятия теории графов.
- Изоморфизм графов.
- Пути и циклы в графе. Теорема Эйлера.
- Деревья и их свойства.

Актуализируются знания основных понятий теории графов (вершины, ребра, степени вершин, связность, пути, циклы), а также базовые свойства (в том числе лемма о рукопожатиях). Введенные ранее понятия развернуто иллюстрируются на конкретных примерах, отрабатывается умение идентифицировать объекты с вершинами и рассматриваемые связи с ребрами, интерпретировать задачу в терминологии теории графов.

Вводится понятие изоморфизма графов. Обращается внимание на топологические свойства графов – в данном контексте под этим понимается независимость ключевых свойств графов от их представления в виде чертежа.

Предлагаются задания на построение графов по заданному набору степеней вершин или на обоснование того, что таких графов нет. Также полезными будут задания на перечисление попарно неизоморфных графов для небольшого количества вершин, а также построение изоморфизма между графами.

При изучении путей и циклов в графе рекомендуется предложить задачи на обоснование связности графов, обоснование наличия путей определенного вида (например, циклов или путей, проходящих по всем вершинам). Здесь же можно ознакомить с понятием эйлерова пути и эйлерова цикла – ввести эти понятия можно через задачи, в которых предлагается нарисовать фигуру из линий, не отрывая карандаша от бумаги. Теорему Эйлера о существовании эйлерова пути или цикла в группах семиклассников можно не доказывать, обосновав лишь необходимость условия на степени вершин (можно это сделать, используя соображения типа «сколько раз заходим в промежуточную вершину, столько раз и должны выйти из неё»). Более старшим школьникам можно рассказать (или предложить придумать самостоятельно) алгоритм построения эйлерова обхода.

Также в группах обучающихся 14 лет (8 класс) можно (при наличии времени) разобрать понятие дерева, изучить основные свойства деревьев (опять же, на основе задач). Понятие дерева вполне можно рассмотреть на примере связной системы дорог без циклов или связной системы дорог с минимальным количеством отрезков пути (на том же примере рассматриваются альтернативные определения дерева, показывается их равносильность, вводится понятие остовного дерева).

*Тематический раздел 9. Метод математической индукции*

Содержание раздела:

- Классическая схема математической индукции. От последовательного конструирования до индукции.
- Индукция для доказательства тождеств и неравенства.

– Индукция в графах.

Пропедевтический этап формирования представлений о математической индукции как методе решения задач рекомендуется построить на основе последовательного построения конструкций: от построения нескольких примеров с небольшим количеством составных частей (слагаемых, фигурок при разрезании, закрашенных клеток и так далее) перейти к идее обоснования того, что такой пример можно построить для любого количества составляющих. В дальнейшем даже при рассмотрении строгой схемы математической индукции (с обоснованием базы индукции и индукционного перехода) полезно обосновать требуемое утверждение для небольших значений параметра задачи, желательно используя в доказательстве доказательства уже доказанные утверждения для меньших значений параметра.

В любом случае важно ввести метод математической индукции как универсальный (общематематический) метод решения задач. Для этого необходимо продемонстрировать возможность применения данного метода в различных областях математики: при доказательстве числовых тождеств и неравенств, при решении комбинаторных задач, при доказательстве некоторых свойств графов. Доказательство тождеств и неравенств с помощью метода математической индукции рекомендуется проводить после того, как на занятии математического объединения пройдёт занятие, посвященное алгебраическим преобразованиям.

Для старших школьников также будет уместно объединить одно занятие по теме «Метод математической индукции» с занятием по теме «Теория графов», где бы обсуждались свойства путей и циклов. В этом случае необходимые свойства графов можно было бы доказать по индукции (естественно, последовательно разобрав для начала несколько примеров с малым количеством вершин, и лишь потом переходя к строгому доказательству). Очень важно при разборе задач (даже при наличии строгого доказательства) регулярно демонстрировать индукционный переход для серии частных случаев с небольшими значениями параметров (естественно, такой разбор должен дополнять, помогать иллюстрировать строгое доказательство, а не заменять его).

*Тематический раздел 10. Математические соревнования*

Содержание темы:

- Ознакомление с правилами математических олимпиад, аукционов, карусели, регаты, абаки, домино, крестиков-ноликов.
- Решение и анализ задач математических соревнований, олимпиад, турниров.
- Проведение соревнований.

Допускается разбор материала темы (проведение математических соревнований) в течение года. Обучающиеся последовательно знакомятся с правилами личных и командных математических соревнований в процессе участия в них.

## 4. Планируемые результаты

Предполагаемыми результатами реализации программы являются:

- проявление интереса к математике, к продолжению дополнительных систематических занятий математикой;
- понимание роли математики в современном мире, осознание ее необходимости как элемента культуры, социальной, личной и профессиональной компетентности;
- формирование математических компетенций, овладение новыми идеями и методами решения математических задач;
- овладение первичными навыками научной математической деятельности;
- повышение общего интеллектуального и математического уровня обучающихся;

– развитие математической интуиции, логического мышления, формирование и развитие математической культуры;
– умение адекватно и эффективно применять изученные методы и принципы в решении практических задач, а также способность представлять достигнутые результаты в сочетании с их обсуждением.

На различных уровнях освоения программы математически объединений предполагается достижение следующих образовательных результатов:

| **Уровень**<br><br>**Результат** | **Стартовый** | **Базовый** | **Продвинутый** |
|---|---|---|---|
| **Знать** | - содержание основных общематематических понятий, в том числе используемых для решения задач;<br>- идеи основных методов, используемых для решения задач;<br>- основные узкоспециальные понятия конкретных тематических разделов, стандартные методы решения типовых задач по указанной теме;<br>- возможности стандартных математических средств для решения задач начального уровня. | - содержание основных общематематических понятий, в том числе используемых для решения задач;<br>- общематематические методы решения математических задач;<br>- основные узкоспециальные понятия конкретных тематических разделов, методы, идеи и принципы решения задач различной сложности по указанной теме;<br>- основные преимущества и недостатки, ключевые особенности применения различных | - всю совокупность общематематических понятий в рамках программы, в том числе используемых в образовательной программе для решения задач;<br>- разнообразные общематематические методы и узкоспециальные приемы решения математических задач;<br>- полный набор понятий, лемм, теорем в рамках узкотематического раздела, общие методы решения задач по указанной теме;<br>- основные преимущества и недостатки, ключевые особенности |

| Уровень<br><br>Результат | Стартовый | Базовый | Продвинутый |
|---|---|---|---|
| | | математически методов в решении задач. | применения различных математически методов в решении задач;<br>- взаимосвязь различных тематических разделов (как пример взаимосвязи между разделами математики), специфику и возможность применения разнообразных математических методов в решении прикладных задач. |
| **Уметь** | -применять готовый математический инструментарий для решения типовых шаблонных задач по соответствующей теме;<br>- логически мыслить на начальном уровне, понимать основные логические связки;<br>- строить конструкции для иллюстрации основных понятий, предлагать примеры и | - применять и варьировать различные подходы к решению математических задач различной сложности, для которых не приводится явным образом алгоритма решения;<br>- логически мыслить, использовать правила логического вывода для построения математических рассуждений;<br>- последовательно строить | - уверенно применять разнообразные методы, идеи и принципы решения математических задач, в том числе нестандартных задач, требующих применения совокупности разнообразных методов решения;<br>- логически мыслить, строить сложные логические структуры для проведения математических рассуждений с использованием |

| Уровень<br><br>Результат | Стартовый | Базовый | Продвинутый |
|---|---|---|---|
| | контрпримеры для математических утверждений;<br>- планировать свою деятельность в рамках занятия с помощью преподавателя (на основе логической математической связи между основными рассматриваемыми утверждениями). | конструкции для иллюстрации основных понятий, предлагать примеры и контрпримеры для математических утверждений;<br>- самостоятельно планировать свою деятельность в рамках занятия (на основе логической математической связи между основными рассматриваемыми утверждениями). | правил логического вывода;<br>- предлагать сложные примеры конструкций для иллюстрации основных понятий, рассматриваемых в программе, и связей между этими понятиями;<br>- самостоятельно планировать свою деятельность в рамках занятия (на основе логической математической связи между основными рассматриваемыми утверждениями), планировать математическую деятельность в рамках всего курса освоения программы на основе понимаемой взаимосвязи между основными тематическими разделами. |
| **Владеть** | - способностью понимать соответствие предложенного в разделе математического инструментария | - способностью применять базовый набор математических методов для решения задач стартового и базового уровня; | - способностью самостоятельно определять математический инструментарий для решения задач, в том числе повышенного уровня сложности; |

| Уровень<br><br>Результат | Стартовый | Базовый | Продвинутый |
|---|---|---|---|
| | поставленным задачам;<br>- базовыми навыками сбора, анализа, и систематизации данных для решения задачи; | - навыками сбора, анализа, систематизации и обобщения необходимых данных для адекватной постановки и решения задачи;<br>- навыками последовательного конструирования примеров и контрпримеров;<br>- навыками ведения научной дискуссии на базовом уровне (способность самостоятельно предъявлять результат в структурированной форме, принимать критические замечания, планировать деятельность по устранению недостатков, способность к ведению корректной критики по существу обсуждаемого вопроса). | - навыками сбора, анализа, систематизации и обобщения необходимых данных для адекватной постановки и решения задачи;<br>- навыками последовательного конструирования примеров и контрпримеров;<br>- навыками ведения научной дискуссии на базовом уровне (способность самостоятельно предъявлять результат в структурированной форме, принимать критические замечания, планировать деятельность по устранению недостатков, способность к ведению корректной критики по существу обсуждаемого вопроса).<br>- развитыми навыками математической интуиции, целенаправленного поиска адекватных |

| Уровень<br><br>Результат | Стартовый | Базовый | Продвинутый |
| --- | --- | --- | --- |
| | | | математических методов для решения задач и обоснования ключевых математических утверждений. |

Вариативный характер программы предполагает, что для разных тематических разделов программы возможно обучение на различных уровнях. В то же время целостное освоение программы на продвинутом уровне возможно только при достаточной сформированности математических компетенций на базовом уровне, так как предполагаем владение всем спектром математических идей, методов и принципов, изучаемых в предложенной дополнительной образовательной программе.

## Раздел №2 Комплекс организационно-педагогических условий

### 1. Календарный учебный план

Количество учебных недель: 36

Количество учебных дней: 36

Периоды обучения: сентябрь-декабрь, январь-июнь

### 2. Условия реализации программы

#### *2.1. Материально-техническое обеспечение*

Материально-техническая база соответствует санитарным и противопожарным нормам, нормам охраны труда.

Для реализации дополнительной общеобразовательной – дополнительной общеразвивающей программы «Математика: удивительный мир логики и творчества» необходимый перечень учебных аудиторий и материально-технического обеспечения включает в себя:

- учебные столы/парты, стулья для обучающихся;
- стол, стул для педагога;
- доска меловая или маркерная (мел, маркеры для доски);
- технические средства обучения (компьютер/ноутбук, видеопроектор, проекционный экран) с подключением к сети Интернет;
- комплекты индивидуальных раздаточных материалов для обучающихся.

#### *2.2. Кадровое обеспечение*

Настоящая программа может быть реализована педагогом дополнительного образования или учителем, имеющими высшее профессиональное образование в области математики. Желателен опыт работы с одаренными детьми, умение стимулировать их познавательную активность, поддерживать различные виды интеллектуальной и творческой деятельности; наличие высокого потенциала и способностей к профессиональному саморазвитию и самосовершенствованию.

## 3. *Формы аттестации*

Неотъемлемой частью образовательного процесса является аттестация результатов освоения обучающими дополнительной – дополнительной общеразвивающей программы «Математика: удивительный мир логики и творчества» т.к. она выполняет учебную, воспитательную, развивающую, коррекционную и социально-психологическую функцию.

В рамках освоения программы предусмотрена начальная, текущая, промежуточная и итоговая оценка образовательных результатов.

**Виды и сроки аттестации (контроля)**

| Время проведения | Цель проведения | Формы контроля |
|---|---|---|
| *Начальный или входной контроль* | | |
| В начале учебного года | Определение уровня математической подготовки обучающихся. Проверка уровня остаточных знаний. | – Тест<br>– Фронтальный и индивидуальный опрос |
| *Текущий контроль* | | |
| В течение учебного года | Получение информации о ходе и качестве усвоения учебного материала, а также сведений для своевременной корректировки образовательного процесса. | – Текущий диалог с обучающимися в рамках приема задач с фиксацией выполненных заданий.<br><br>Подробнее такой подход (в том числе особенности формирования текущего рейтинга) описан ниже в разделе «Методическое обеспечение. 4.1. Формы организации занятия на основе решения задач», подраздел «Система листков как форма контроля». |

| | | |
|---|---|---|
| *Промежуточный контроль* | | |
| По окончании изучения темы или раздела. В конце полугодия. | Определение степени усвоения обучающимися учебного материала. Определение результатов обучения. | – Фронтальный и индивидуальный опрос<br>– Математическое соревнование<br>– Контрольная работа,<br>– Командное математическое соревнование<br>– Работа в группах, обсуждение<br>– Тест |
| *Дифференцированный итоговый контроль* | | |
| В конце учебного года | Определение изменения уровня сформированности практических умений и навыков детей, их творческих способностей в предметной области «Математика». Определение результатов обучения. Получение сведений для совершенствования дополнительной общеобразовательной общеразвивающей программы «Математика: удивительный мир логики и творчества» и методов обучения. | – Итоговая аттестация на базовом и продвинутом уровне в рамках конкретного года обучения осуществляется проведением общего зачёта по курсу соответствующего учебного года образовательной программы.<br>– Устная личная математическая олимпиада для обучающихся, показавших в итоговой контрольной работе (Приложение 4) результат определенного уровня.<br>– Участие в математических олимпиадах, турнирах и конкурсах различного уровня, научно-практических конференциях, образовательных проектах |

Предполагается, что об успешном прохождении программы на базовом уровне можно говорить при уровне выполнения зачетной работы на 30-60% от максимального возможного результата; на продвинутом уровне – 60-100% от максимально возможного результата. Возможный вариант контрольной работы представлен в разделе «Методическое обеспечение».

## 4. Методические материалы

### *4.1. Формы организации образовательного процесса и учебных занятий*

В ходе реализации дополнительной общеобразовательной – дополнительной общеразвивающей программы «Математика: удивительный мир логики и творчества» на учебных занятиях наравне с индивидуальной, групповой, фронтальной формами обучения, широко используются и такие как самообразование и саморазвитие обучающихся.

Программой предусмотрено проведение теоретический и практических учебных занятий (в большинстве случаев без явного разделения между этими двумя формами).

Теоретические занятия предполагают изложение педагогом теоретического материала и самостоятельную работу обучающихся с учебной литературой. В основе практических занятий лежит индивидуальное выполнение обучающимися различных заданий, преимущественно направленных на решение математических задач, а также проведение групповых обсуждений и консультаций.

Типы заданий, используемых в практике:

- Задачи на логический вывод и логическое обоснование, выдвигаемых гипотез, полный перебор комбинаций истинности и ложности высказываний.
- Задачи на соответствия, на разбиение на пары, на чередования.
- Оптимизационные задачи.
- Задачи на построение точных оценок.

– Алгоритмические задачи.
– Переборные задачи.
– Клетчатые доски и таблицы.

Наряду с этим, практическая составляющая обогащена активными формами обучения, участием детей в личных математических соревнованиях, имитирующих научно-исследовательскую деятельность и прививающих умения и навыки, свойственные будущей научной работе.

Усиление научного содержания программы требует также систематического использования исследовательского метода в обучении, его следует рассматривать как такую организацию занятий, при которой обучающиеся осознают огромную значимость изучаемой проблемы, пользуются методами, понятиями для решения поставленной проблемы.

Структура и содержание отдельного занятия выстраивается вокруг задач для самостоятельного решения школьниками. Комплект («листок», «пакет») разноуровневых нестандартных задач является смысловым стержнем занятия: самостоятельно выполняя нестандартные задания, обучающиеся осваивают новые для них идеи и принципы. При этом новый теоретический материал, математические понятия, утверждения, основы новых (для детей) отраслей математики не декларируются педагогом, а вводятся совершенно естественным путём на основе прикладного проблемно-ориентированного подхода, ложатся на подготовленную почву и эффективно усваиваются обучающимися.

**Система листков: общая информация**

Основные принципы построения учебного занятия математического объединения, в большинстве случаев используемые сейчас в системе дополнительного образования детей, сформировались к концу 30-х годов XX века. Именно тогда практика показала, что попытки в чистом виде перенести в систему дополнительного образования сложившиеся стили организации учебной или профессиональной математической деятельности (лекционные курсы, практические семинары, научные семинары с докладами участников) показывают свою неэффективность. В то же время достаточно продуктивным оказался подход, в котором занятие детского математического объединения строится вокруг самостоятельного решения обучающимися математических задач.

Дальнейшее развитие этот принцип получил в 60-е годы в разработанном Н. Н. Константиновым методе листков (отметим, что внедрён он был в практику работы средней школы, однако сейчас более активно применяется именно в рамках системы дополнительного математического образования).

Суть метода заключается в том, что каждый обучающийся в начале занятия получает листок, в котором (возможно) содержатся некоторые основные определения и формулировки математических утверждений (лемм, теорем), а также задачи, подобранные в соответствии с тематикой занятия. Обучающийся самостоятельно изучает новые для него понятия, обосновывает отдельные леммы и теоремы, закрепляет понимание соответствующего теоретического материала при решении задач. При этом решённая и записанная (хотя бы на уровне основных выкладок) задача рассказывается педагогу, при этом в ходе диалога обсуждаются и устраняются недочёты в решении, отмечаются положительные и не очень удачные пути решения задачи, в целом разбираются связи между изученными математическими понятиями и возможности их приложения на практике. Наиболее важной особенностью такого подхода является то, что дети ориентированы не на пассивное усвоение материала, а именно на активную познавательную деятельность, самостоятельное открытие новых для себя способов решения задач и новых математических фактов.

Ниже будут описаны возможные особенности построения занятия с использованием листков, а также отмечены некоторые положительные и отрицательные стороны такого подхода.

## Общие принципы формирования комплектов заданий

Система листков является достаточно гибкой: на учебном занятии детского математического объединения может быть листок, состоящий только из задач (и тогда занятие превращается в чисто практическое), однако вполне возможно сформировать листок на основе определений и теорем из нового тематического раздела, а вместо задач предложить доказать обучающимся предложенные утверждения (в том числе можно разбить доказательство крупной теоремы на несколько этапов, предоставив школьникам возможность доказать их самостоятельно). В конце концов, вполне допустимо, даже если система листков взята за основу, чередовать такой подход с другими формами работы: например, проводить лекции, семинары (в том числе и с участием детей в роли докладчиков), обсуждения, индивидуальные или командные математические игры. Иначе говоря, как и с прочими формами работы, система листков применяется тогда, когда в ней есть педагогическая целесообразность.

С учетом особенностей целевой аудитории программы (как возрастных особенностей, так и возможного неоднородного уровня конкретной учебной группы в математическом объединении), а также основных целевых установок проводимого занятия, подбор комплекта заданий в листок требует учета большого количества факторов.

Примеры комплектов заданий (листков) представлены в Приложениях 1,2,3.

## Количество заданий, разбиение на части

Обучающиеся 11-12 лет (5-6 классов), а порой и более старшие, пока в основной своей массе плохо умеют планировать свою деятельность даже на протяжении одного занятия. Поэтому включение в листок большого количества задач (например, более 10) приводит к тому, что дети распыляются, начинают браться за все задания подряд, решают задачи бессистемно, не могут продуктивно сосредоточиться на аккуратном продуманном решении задачи. В то же время малое количество заданий не позволяет гибко соответствовать возможностям как более слабых, менее обученных или предпочитающих работать в более медленном темпе школьников, так и одновременно с ними более подготовленных обучающихся с более высоким стартовым уровнем, мотивацией или текущим уровнем. Возможные варианты решения этой проблемы:

– оптимизация количества заданий: подумайте, правда ли Вы хотите вставить в комплект такое количество задач на такое небольшое время; постарайтесь убрать задачи, которые не несут дополнительной смысловой нагрузки, дублируют уже использованные в других задачах идеи; оставьте 8-10 задач (при большом желании – 12);
– дробление листка на фрагменты: допустимо разбить листок с набором заданий на несколько «порций» по 3-6 заданий, при этом выдавать следующий листок только тем, кто достаточно хорошо продвинулся в выполнении заданий с предыдущего.

**Планирование выполнения заданий**

В некоторых случаях оказывается полезным, чтобы обучающиеся выполняли задания листка в какой-то определённой последовательности. Например, это целесообразно при планомерном изучении какой-то новой темы, в которой математические факты и закономерности образуют упорядоченную последовательность. Также бывает полезным решение задач по мере возрастания сложности (если так они были упорядочены на листке).

Реализовать необходимую упорядоченность в выполнении заданий можно следующими способами:

– декларативно: в сопроводительном комментарии (устном или письменном) явно объявляется, что задания (доказательство теорем, решение задач) выполняются строго последовательно или в ином объявленном порядке; допускается также запрещать использовать при сдаче задания математический факт (теорему, лемму, результат одной из задач) до того, как этот факт будет доказан;

- разбиением листа: как было сказано выше, листок может быть разделён на несколько фрагментов, при этом необходимая упорядоченность в выполнении заданий частично реализуется неодновременностью выдачи фрагментов (в результате очередную часть листка школьник получает тогда, когда доказал все необходимые факты с предыдущего листка).

**Индивидуализация листков**

В своей исходной форме описываемая система предполагает, что все обучающиеся на занятии изначально получают один и тот же набор заданий. Тем не менее, всегда существует возможность отойти от данной парадигмы и формировать на основе листков, разбитых на фрагменты (модули) индивидуальную образовательную траекторию. Таким образом, уже варианты первой части листка или полностью весь листок можно составить в расчёте на конкретный уровень обучающихся:

- для стартового уровня можно больший упор сделать на основных понятиях рассматриваемой темы, на иллюстрации вводимых понятий примерами, усилить задачами стартового уровня;
- для базового уровня первый листок уже может содержать задачи разного уровня на использование введённых понятий на практике, а также подготовить переход школьников к более сложным задачам и понятиям;
- для продвинутого уровня обучающихся первый листок может содержать задания, на примере которых школьники могут показать уверенное владение всем объёмом введённых понятий и математических утверждений, а также набор заданий с переходом к задачам повышенной сложности.

Следующие (после первого) фрагменты листков могут быть использованы для оперативной коррекции образовательного маршрута. Обучающимся, достаточно быстро освоившим все необходимые понятия и продемонстрировавшим способность их применить для решения сложных задач, можно предложить более сложные задания в дополнительном листке. В то же время тем, кто испытал достаточно серьёзные затруднения в самостоятельном изучении темы, допускается дать фрагмент листка на дальнейшее закрепление рассматриваемых понятий с большим упором на их иллюстрацию и применение в решении более простых типовых задач.

### Организация приёма и обсуждения задач

Общая организационная структура учебного занятия на основе системы листков была описана выше: в начале занятия, возможно после вводного доклада педагога, обучающиеся получают листок (по умолчанию один и тот же, хотя возможна их индивидуализация) с заданиями, который выполняют в течение всего отведённого времени. Выполнив очередное задание или несколько заданий, обучающийся информирует педагога о своём желании отвечать, после чего индивидуально и максимально изолированно от других обучающихся обсуждает с преподавателем свои продвижения в решении. Преподаватель указывает на имеющиеся в решениях недостатки, ошибки, возможные пути исправления, а ребенок отвечает на заданные вопросы, исправляет решения, корректирует планы дальнейшей работы.

Отметим, что при приёме задач следует не переусердствовать с зачётной функцией листка. Обсуждение задач не должно превращаться в экзамен (хотя определённые функции контроля в системе листков предусмотрены) и в идеале представляет собой беседу двух математиков (начинающего и более опытного, но построенную на принципах равенства, научности и аргументированности) – конструктивную, настроенную на продвижение вперёд и изучение нового, а не только на обсуждение ошибок.

## Система листков как форма контроля

Безусловно, уже наиболее очевидные результаты выполнения предложенных заданий («самостоятельно доказал теорему», «решил задачу», «придумал доказательство утверждения в одну сторону» и т.д.) являются значимыми показателями общей эффективности усвоения программного материала. Поэтому ведение текущего рейтинга является достаточно эффективным средством организации текущего контроля успеваемости.

В рамках системы листков наиболее традиционной является оценка в 1 балл за каждое выполненное задание (вне зависимости от его сложности). Однако балл ставится только в том случае, если задание выполнено полностью, все неточности устранены, ошибки исправлены и решение может считаться полностью изложенным. Тем не менее, количество подходов (попыток сдать задачу) на занятии обычно не регламентируется, а итоговый результат (1 балл за полностью решённую задачу и 0 балл за нерешённую или решённую не полностью) не зависит от количества подходов.

| | | | | | | | | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| 11 | 8 класс | | | | | Комбинаторика (область, 17.01.17) | | | | | | | | |
| 12 | Фамилия | Имя | Сумма | класс | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Сумма |
| 13 | Фамилия1 | Имя1 | 54 | 8 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 6 |
| 14 | Фамилия2 | Имя2 | 19 | 8 | | 1 | 1 | | | | | | | 2 |
| 15 | Фамилия3 | Имя3 | 27 | 8 | | 1 | 1 | | | | | | | 2 |
| 16 | Фамилия4 | Имя4 | 61 | 8 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 6 |
| 17 | Фамилия5 | Имя5 | 65,5 | 8 | | | | | | | | | | 0 |
| 18 | Фамилия6 | Имя6 | 40 | 8 | | | | | | | | | | 0 |
| 19 | | | | | | | | | | | | | | |
| 20 | 9 класс | | | | | Комбинаторика (область, 17.01.17) | | | | | | | | |
| 21 | Фамилия | Имя | Сумма | класс | | 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 | 7 | 8 | Сумма |
| 22 | Фамилия1 | Имя1 | 53 | 9 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | | | | 4 |
| 23 | Фамилия2 | Имя2 | 63 | 9 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 5 |
| 24 | Фамилия3 | Имя3 | 85 | 9 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 6 |
| 25 | Фамилия4 | Имя4 | 66 | 9 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | 6 |
| 26 | Фамилия5 | Имя5 | 0 | 9 | | | | | | | | | | 0 |
| 27 | Фамилия6 | Имя6 | 56 | 9 | | 1 | | 1 | | | | | | 2 |
| 28 | Фамилия7 | Имя7 | 46 | 9 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | | | 5 |
| 29 | Фамилия8 | Имя8 | 20 | 9 | | | | | | | | | | 0 |
| 30 | Фамилия9 | Имя9 | 10 | 9 | | | | | | | | | | 0 |
| 31 | Фамилия10 | Имя10 | 59 | 9 | | 1 | 1 | 1 | | 1 | 1 | | | 5 |
| 32 | Фамилия11 | Имя11 | 54 | 9 | | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | 1 | | 1 | 7 |
| 33 | Фамилия12 | Имя12 | 8 | 9 | | | | | | | | | | 0 |

***Рис. 1 Текущий рейтинг и рейтинг отдельного занятия***

Таким образом, педагог ведёт рейтинг как отдельного занятия, так и общую рейтинговую таблицу на протяжении всего учебного года. Для удобства подсчёта актуального рейтинга учащихся удобнее всего вести в формате электронной таблицы – либо в книге Microsoft Excel или Open Office Calc, либо в сервисах типа Google.Таблицы. Последний вариант предпочтительнее в ситуации, когда в месте проведения занятий есть доступ к глобальной сети, а также в условиях, когда оперативный доступ к рейтинговой таблице нужно обеспечить нескольким пользователям (например, преподавателю и его ассистенту или преподавателю конкретного математического объединения и координатора математических объединений). Пример рейтинговой таблицы (как с текущим рейтингом-суммой, так и с результатами отдельного занятия) можно представлен на рисунке 1.

Безусловно, использование рейтинга как единственной формы контроля значительно снижает возможности педагога по оценке сформированности компетенций на различном уровне реализации образовательной программы. Поэтому для эффективной оценки текущего уровня обучающихся целесообразно использовать и другие подходы. Например, так как процедура работы по листкам сопряжена с устной сдачей и обсуждением выполненных заданий, то уже эта беседа педагога (эксперта) со школьником является формой организации контроля образовательных достижений. Наиболее эффективным является сочетание различных принципов контроля в ходе занятия математического объединения, построенного по системе листков:

1. На стартовом уровне: в ходе диалога по заданиям листка отмечается усвоение основных понятий изучаемой темы, способность осмысленно их воспроизводить, сопровождать примерами, различать по предложенному примеру соответствие и несоответствие примера изучаемому понятию, способность решать простейшие типовые задания на использование изученных понятий и идей на практике.

2. На базовом уровне: в ходе диалога по решенным заданиям листка и по итогам анализа рейтинговой таблицы отмечается владение всеми необходимыми изучаемыми понятиями и идеями, что проявляется в хорошем уровне решения задач базового уровня (в пределах 50% от общего количества предложенных заданий различного уровня), способность применять основные математические методы и идеи в решении предложенных задач.
3. На продвинутом уровне: в ходе диалога по решенным заданиям листка и по итогам анализа рейтинговой таблицы отмечается уверенное владение основными математическими понятиями в рамках изучаемой темы, способность формулировать и доказывать ключевые математические утверждения, способность применять изученные математические идеи, методы и принципы при решении сложных математических задач (на уровне второй части листка заданий).

Ещё раз отметим, что чрезмерное внимание к контролю текущей успеваемости (в том числе частое публичное оглашение результатов отдельных школьников) вводят в занятия математического объединения слишком сильный спортивный элемент, в результате работа с листками переключается с изучения чего-то нового, интересного и конструктивного в бесконечный процесс добычи рейтинговых баллов (правдами и неправдами). Такой процесс смены цели занятия с содержательной на формальную приводит к разнообразным негативным эффектам и резко снижает позитивные результаты как от использования листковой системы, так и от занятий в принципе.

### *4.2. Педагогические технологии и методы обучения*

Для достижения поставленных дидактических целей и реализации познавательной и творческой активности обучающихся в образовательном процессе используются следующие педагогические технологии и методы обучения:

1. Математические соревнования: письменная личная математическая олимпиада; устная личная математическая олимпиада; устная командная математическая олимпиада. (Приложение 5);
2. Математические игры: математический хоккей, математическая карусель, математическая абака, математическая регата, математический брейн-ринг, математический аукцион и др. (Приложение 6);
3. Самостоятельная работа обучающихся с теоретическим материалом;
4. Взаимное обучение, самообучение.
5. Элементы научно-исследовательской деятельности.
6. Технология проблемного обучения.
7. Здоровьесберегающие технологии

Методический фонд по дополнительной общеразвивающей – дополнительной общеразвивающей программе «Математика: удивительный мир логики и творчества» содержит: авторские методические рекомендации к программе по отдельным тематическим модулям, комплект учебно-методической литературы для каждого года обучения, нормативные, финансовые и инструктивные документы, регламентирующие деятельность математических объединений и обеспечивающие их функционирование.

## 5. Список литературы

### 5.1. Нормативно-правовые документы

1. Федеральный закон «Об образовании в Российской федерации» (от 29.12. 2012 года № 273-ФЗ);
2. Концепция развития дополнительного образования детей (утв. распоряжением Правительства РФ от 4.09.2014 года № 1726-р);
3. Порядок организации и осуществления образовательной деятельности по дополнительным общеобразовательным программам (утв. приказом Министерства образования и науки РФ от 29.08.2013 года № 1008);
4. Государственная программа РФ «Развитие образования на 2013-2020 годы» (утв. постановлением Правительства РФ от 15.04.2014 года № 295);
5. Федеральная целевая программа развития образования на 2016-2020 годы (Постановление Правительства РФ от 23.05.2015 N 497);
6. Концепция развития математического образования в Российской Федерации (утверждена распоряжением Правительства РФ от 24 декабря 2013 года № 2506-р)
7. Санитарно-эпидемиологическими правилами и нормативами 2.4.4.3172-14 «Санитарно-эпидемиологические требования к устройству, содержанию и организации режима работы образовательных организаций дополнительного образования детей» (утв. Главным государственным санитарным врачом РФ от 4.07.2014 года № 41).

### 5.2. Учебно-методическая литература

1. Арнольд И. В. Принципы отбора и составления арифметических задач. – М.: МЦНМО, 2014.
2. Блинков А.Д. Классические средние в арифметике и в геометрии. – М.: МЦНМО, 2012
3. Вентцель Е. С.Элементы теории игр. – М.: Физматгиз, 1961.
4. Верещагин Н. К., Шень А.Х. Начала теории множеств. – М.: МЦНМО, 2002.
5. Виленкин Н. Я. Рассказы о множествах. – М.: МЦНМО, 2005.

6. Гарднер М. Математические чудеса и тайны. – М.: Наука, 1978.
7. Генкин С.А., Интенберг И.В., Фомин Д.В. Ленинградские математические кружки. – Киров: Аса, 1994.
8. Гиндикин С. Г. Алгебра логики в задачах. – М.: Наука, 1972.
9. Гордин Р.К. Это должен знать каждый матшкольник. (8-е издание, стереотипное) – М., МЦНМО, 2014.
10. Гуровиц В. М., Ховрина В. В. Графы (4-е, стереотипное) – М.: МЦНМО, 2014.
11. Евдокимов М.А. От задачек к задачам. – М.: МЦНМО, 2004.
12. Екимова М. А., Кукин Г. П. Задачи на разрезание. – М., МЦНМО, 2002.
13. Канель-Белов А.Я., Ковальджи А.К. Как решают нестандартные задачи. – М.: МЦНМО, 1997.
14. Кноп К.А. Взвешивания и алгоритмы: от головоломок к задачам. - М.: МЦНМО, 2011
15. Козлова Е. Г. Сказки и подсказки. – М., МЦНМО, 2004.
16. Кордемский Б. А. Математическая смекалка. – М., ГИФМЛ, 1958.
17. Кэрролл Л. Логическая игра. – М.: Наука, 1991.
18. Левин А.Ю. Что такое комбинаторика. – М.: «Квант», 1999 г., № 5, 6
19. Медников Л. Э. Чётность (5-е, стереотипное) – М., МЦНМО, 2015.
20. Мерзон Г.А., Ященко И.В. Длина, площадь, объем. (3-е, стереотипное) – М., МЦНМО, 2015.
21. Муштари Д.Х. Подготовка к математическим олимпиадам. – Казань, 1990.
22. Перельман Я.И. Занимательная алгебра. – М.: Наука, 1974.
23. Раскина И. В, Шноль Д. Э. Логические задачи. – М., МЦНМО, 2015.
24. Сгибнев А.И. Делимость и простые числа. (3-е, стереотипное) – М., МЦНМО, 2015.
25. Спивак А.В.. Математический праздник. – М.: МЦНМО, 1995.
26. Толпыго А.К. Инварианты. – «Квант», 1976, №12.
27. Тригг Ч. Задачи с изюминкой.

28. Хага К. Оригамика. Геометрические опыты с бумагой (2-е, исправленное). – М.: МЦНМО, 2014.
29. Шарыгин И.Ф., Ерганжиева Л.Н. Наглядная геометрия. – М, 1992.
30. Шень А.Х. Игры и стратегии с точки зрения математики – М.: МЦНМО, 2007.
31. Шень А.Х. Математическая индукция (3-е издание, дополненное) – М.: МЦНМО, 2007.
32. Шень А.Х. Простые и составные числа – М.: МЦНМО, 2005.
33. Штейнгауз Г. Математический калейдоскоп. – М.: Наука, 1981.

### 5.3. Сборники задач

1. Алфутова Н. Б., Устинов А. В. Алгебра и теория чисел. Сборник задач для математических школ (3-е изд., испр. и доп.) — М.: МЦНМО, 2009.
2. Арнольд В. И. Задачи для детей от 5 до 15 лет – М.: МЦНМО, 2007.
3. Бабинская И. Л. Задачи математических олимпиад. – М., Наука, 1975.
4. Блинков А. Д., Горская Е. С., Гуровиц В. М. Московские математические регаты. – М.: МЦНМО, 2007.
5. Бугаенко В.О. Турниры им. Ломоносова. – М.: МЦНМО, 1998.
6. Васильев Н.Б., Егоров А.А. Задачи всесоюзных математических олимпиад. Часть 1. – М.: Бюро Квантум, 2010.
7. Горбачёв Н. В. Сборник олимпиадных задач по математике. — М.: МЦНМО, 2004.
8. Математические бои. Материалы XIII областного турнира. Методическое пособие. – Ярославль: ГУ ЦОШ «Олимп», 2007
9. Математические бои. Материалы XIVобластного турнира. Методическое пособие. – Ярославль: ГУ ЦОШ «Олимп», 2008
10. Математические турниры им. А.П. Савина. Составитель А.В. Спивак. – М.: Бюро Квантум, 2006
11. Прасолов В. В. Задачи по планиметрии (6-е издание, стереотипное) – М.: МЦНМО, 2007.

12.Произволов В. В. Задачи на вырост – М.: МИРОС, 1995.

Приложение 1

## Примеры комплектов заданий (листков)

## Пример 1: первый год обучения, «Логика (модуль 2)»

### Тема: Логика - 2
### Остров рыцарей и лжецов. Часть 1

Мы на острове, где каждый человек принадлежит или к племени рыцарей, или к племени лжецов. Рыцари всегда говорят правду, лжецы всегда лгут.

1. На разминку
   (а) Вы только что прибыли на остров и собираетесь спросить первого встречного аборигена, из какого он племени. Что он вам ответит?
   (б) Федя всегда говорит правду, а Вадим всегда лжёт. Какой вопрос надо им задать, чтобы они дали на него одинаковые ответы (оба ответили «да» или оба «нет»)?
2. На остров рыцарей и лжецов приехал путешественник и нанял себе проводника. Однажды, увидев вдали туземца, путешественник сказал проводнику: «Пойди и спроси у того человека: рыцарь он или лжец». Вскоре проводник вернулся и сказал: «Этот человек сказал, что он лжец». Кем был проводник, рыцарем или лжецом?
3. Один островитянин сказал другому: «По крайней мере один из нас рыцарь». «Ты лжец!», ответил ему второй. Кто из них, кто?
4. В порту собралось несколько островитян, каждый из которых сказал: «Все остальные собравшиеся лжецы». Сколько рыцарей собралось в порту?
5. Путник встретил троих островитян и спросил каждого: «Сколько рыцарей среди твоих путников?» Первый ответил «Ни одного», второй «Один». Что сказал третий?
6. За круглым столом сидят 4 островитянина. Каждый из сидящих за столом произнёс: «Напротив меня сидит лжец». Сколько лжецов за столом?
7. На острове некоторые заявили, что всего чётное число рыцарей, а остальные заявили, что на острове нечётное число лжецов. Так чётно или нечётно число жителей острова?
8. Какой вопрос задать островитянину, чтобы узнать, водятся ли на острове тигры?

### Остров рыцарей и лжецов. Часть 2

1. В ряд выстроились 10 аборигенов. Каждый сказал: «Слева от меня рыцарей меньше, чем лжецов справа». На каких местах в ряду стоят рыцари?

2. а) За круглым столом сидело девять островитян. Каждый из них сказал: «Мои соседи из разных племён». Сколько рыцарей было за столом? б) А если бы за столом было 7 островитян?
3. По кругу сидят рыцари и лжецы. Всего 12 человек. Каждый из них сделал заявление: Все кроме, быть может, меня и моих соседей, лжецы». Сколько рыцарей сидит за столом?

Приложение 2

**Пример 2: второй год обучения, «Принцип Дирихле (модуль 1)»**

## Тема: Принцип Дирихле - 1
## Принцип Дирихле

Вспомним, что же это такое.

Иногда принцип Дирихле называют «Принцип клеток и кроликов». Всё из-за такой задачи:

> *Если клеток больше, чем кроликов, то при любой рассадке кроликов в клетки найдётся такая клетка, где кроликов больше одного.*

Начнём с того, что докажем принцип Дирихле. Ведь это не просто способ, который нам дали, а мы пользуемся, а такое же математическое утверждение, какие мы обычно доказываем. Итак, доказательство:

> *Обозначим через x количество клеток. Предположим, что утверждение неверно: то есть, рассадили кроликов в клетки – и в каждой клетке оказалось не больше одного кролика. Но если в первой клетке не больше одного кролика, во второй не больше одного, в третьей не больше одного, и так далее, то всего кроликов не больше 1 + 1 + 1 + … (x раз) – то есть всего не больше x. А по условию кроликов больше x. Противоречие. Значит, наше предположение было неверным.*

Конечно, принцип Дирихле можно обобщить (и поученное утверждение так и будем называть: *обобщённый принцип Дирихле*).

> *Пусть клеток N, а кроликов в этих клетках больше, чем kN. Тогда при любой рассадке кроликов в клетки найдётся такая клетка, где кроликов больше k.*

А теперь попробуйте использовать такой способ при решении задач.

**Задачи**

1. Докажите, что в любой футбольной команде есть два игрока, которые родились в один и тот же день недели.
2. Докажите, что среди 100 собравшихся на олимпиаду школьников обязательно найдутся хотя бы 9, которые родились в одном месяце.

3. В мешке лежат белые и черные шарики. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались два шарика одного цвета?
4. В мешке лежат белые и черные шарики. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались три шарика одного цвета?
5. В мешке лежат белые, черные и синие шарики. Какое наименьшее число шариков нужно вынуть из мешка вслепую так, чтобы среди них заведомо оказались пять шариков одного цвета?
6. Пятнадцать мальчиков собрали вместе 100 орехов. Докажите, что какие-то двое из них собрали одинаковое число орехов.

**Задачи (часть 2)**

1. Помните, как мы доказали принцип Дирихле? А теперь докажите и обобщённый принцип Дирихле.
2. В классе из 25 человек оказалось, что разных имён среди всех учеников всего лишь шесть, а разных фамилий – всего лишь четыре. (а) Докажите, что найдутся не менее 7 школьников с одинаковыми фамилиями. (б) Докажите, что найдутся хотя бы два человека, у которых совпадают и имя, и фамилия.
3. 10 друзей послали друг другу праздничные открытки. Каждый послал 5 открыток. Докажите, что двое послали открытки друг другу.
4. Докажите, что в любой момент однокругового чемпионата найдутся две команды, сыгравшие одинаковое число матчей.
5. Числа 1, 2, 3, 4, 5, 6, 7 разбиты на 2 группы. Докажите, что произведение чисел хотя бы в одной из групп меньше 72.
6. Докажите, что из любых 10 чисел можно выбрать несколько, сумма которых делится на 10.

Приложение 3

**Пример 3: третий год обучения, «Теория чисел (модуль 3)»**

## Тема: Теория чисел - 3
## Наибольший общий делитель и наименьшее общее кратное

### Задачи

1. Найдите с помощью разложения на простые множители:
   (а) НОД (100, 36) и НОК(100, 36) (б) НОД(144, 225) и НОК(144, 225)

   (в) НОД (264, 715)
2. Найдите НОД чисел: (а) 175 и 624, (б) 403 и 257, (в) 403 и 247
3. Конфеты «Сладкая математика» продаются по 12 штук в коробке, а конфеты «Геометрия с орехами» – по 15 штук в коробке. Какое наименьшее число коробок конфет того и другого сорта необходимо купить, чтобы тех и других конфет было поровну?
4. Коля, Серёжа и Ваня регулярно ходили в кинотеатр. Коля бывал в нём каждый 3-й день, Серёжа – каждый 7-й, Ваня – каждый 5-й. Сегодня все ребята были в кино. Когда все трое встретятся в кинотеатре в следующий раз?
5. Найдите такие целые x и y, что
   (а) НОД(6,4) = 6x + 4y, (б) НОД(36, 24) = 36x + 24y, (в) НОД(69, 35) = 69x + 35y.
6. Жители острова Невезения, как и мы с вами, делят сутки на несколько часов, час на несколько минут, а минуту на несколько секунд. Но у них в сутках 77 минут, а в часе 91 секунда. Сколько секунд в сутках на острове Невезения?

### Задачи (часть 2)

1. Фома и Ерема нашли на дороге по пачке 11-рублевок. В чайной Фома выпил 3 стакана чая, съел 4 калача и 5 бубликов. Ерема выпил 9 стаканов чая, съел 1 калач и 4 бублика. Стакан чая, калач и бублик стоят по целому числу рублей. Оказалось, что Фома может расплатиться 11-рублевками без сдачи. Покажите, что это может сделать и Ерема.
2. Существуют ли 6 последовательных натуральных чисел таких, что наименьшее общее кратное первых трех из них больше, чем наименьшее общее кратное трех следующих?
3. Петя собирается все 90 дней каникул провести в деревне и при этом каждый второй день (то есть через день) ходить купаться на озеро, каждый третий – ездить в магазин за продуктами, а каждый пятый день --- решать задачи по математике. (В первый день Петя сделал и первое, и второе, и третье и очень устал.) Сколько будет у Пети <<приятных>>

дней, когда нужно будет купаться, но не нужно ни ездить в магазин, ни решать задачи? Сколько <<скучных>>, когда совсем не будет никаких дел?

### Задачи (часть 3)

1. Докажите, что числа $27x + 4$ и $18x + 3$ взаимно простые при любом натуральном $x$.
2. Отец говорит сыну:
   - Сегодня у нас у обоих день рождения, и ты стал ровно в 2 раза моложе меня.
   - Да, и это восьмой раз за мою жизнь, когда я моложе тебя в целое число раз.

   Сколько лет сыну, если отец не старше 75 лет?
3. Существуют ли такие десять попарно различных натуральных чисел, что их среднее арифметическое больше их наибольшего общего делителя (а) ровно в шесть раз; (б) ровно в пять раз?
4. Сколько существует пар натуральных чисел, у которых наименьшее общее кратное (НОК) равно 2000?

Приложение 4

## Пример итоговой контрольной работы

для учащихся математических объединений (1, 2 и 3 год обучения, 5-8 класс)

### Структура работы

1. Комплект заданий контрольной работы состоит из 6 задач.
2. Задачи относятся к различным разделам дополнительной образовательной программы математических объединений (соответственно, первый, второй и третий год обучения) и рассчитаны на учащихся 5-8 классов.

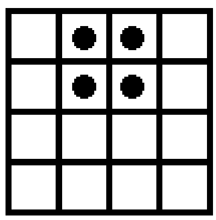
### Требования к проведению зачетной (контрольной) работы

1. Контрольная работа оформляется письменно.
2. Время выполнения работы: 2 академических часа (80-100 минут).
3. Для удобства дальнейшего сканирования работ рекомендуется оформлять работу на листах А4 (это не является обязательным требованием, но сильно упрощает сканирование).

### Требования к проверке работ

1. Предполагается, что итогом выполнения практически каждого задания является записанное развернутое решение (а не просто ответ, схема, чертеж и т.д.).
2. Решение каждой из предложенных задач оценивается от 0 до 7 баллов. Баллы по отдельным задачам суммируются. Суммарный балл является результатом контрольной работы.
3. Если задача оценивается не в полный балл, то в работе необходимо (красной ручкой) делать пометки, отмечая и комментируя, за что были снижены баллы.
4. На первой странице работы следует заполнить таблицу с результатами проверки (в баллах).

### Задания (первый год обучения)

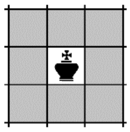


1. В клетчатый квадрат 4×4 поставлены 4 фишки (рисунок справа). Покажите, как его разрезать на 4 разные клетчатые фигурки, в каждой из которых есть по одной фишке. (Фигурки разные, если они отличаются по количеству клеток или по форме. Резать можно только по линиям клеточек.)
2. Крестьянин, покупая товары, уплатил первому купцу половину своих денег и ещё 1 рубль; потом уплатил второму купцу половину оставшихся денег да ещё 2 рубля и, наконец, уплатил третьему купцу половину оставшихся да ещё 1 рубль. После этого денег у крестьянина не осталось. Сколько рублей у него было первоначально?
3. Три землекопа за два часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?

4. В большой футбольной команде было 100 игроков – с номерами 1, 2, 3, …, 100. Главный тренер посчитал, что те игроки, номер которых начинается на 3, не вписываются в состав – и выгнал их из команды. Помощник главного тренера решил, что игроки с номерами, оканчивающимися на 5, мало внимания уделяют тренировкам – с этими игроками тоже расстались. Наконец, тренер вратарей заявил, что если номер игрока делится на 13, то такой игрок приносит неудачу, – всех таких игроков (кто ещё не был выгнан) тоже решили убрать из состава. Сколько же человек осталось в команде после всех этих решений?
5. Дима задумал натуральное число от 1 до 20. Одноклассники решили выяснить, что это за число, и начали задавать Диме вопросы:
   – Оно больше 7?
   – Оно делится на 2?
   – Оно делится на 4?
   – В нём есть цифра 1?
   – Оно делится на 8?
   – Оно меньше 18?

На каждый вопрос Дима ответил: «Да». Один раз Дима соврал, зато остальные ответы были правдивыми. Какое же число мог задумать Дима? Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему других нет.

6. Шахматный король бьёт все клетки, которые стоят рядом с ним (как показано на рисунке). Какое наименьшее количество шахматных королей можно поставить на клетчатую доску 5×5 так, чтобы они били все незанятые клетки доски? Покажите, как следует расставить королей, и обоснуйте, почему меньшим количеством королей не обойтись.



## Задания (второй год обучения)

1. Уроки в школе начинаются в 8:30. Андрей вышел в 8:05 из дома в школу к первому уроку, но на середине пути понял, что не взял сменную обувь. Пришлось за ней возвращаться, в результате Андрей появился в школе лишь в 8:35. Во сколько бы Андрей пришёл в школу, если бы не забыл сменную обувь?
2. В большой футбольной команде было 100 игроков – с номерами 1, 2, 3, …, 100. Главный тренер посчитал, что те игроки, номер которых начинается на 3, не вписываются в состав – и выгнал их из команды. Помощник главного тренера решил, что игроки с номерами, оканчивающимися на 5, мало внимания уделяют тренировкам – с этими игроками тоже расстались. Наконец, тренер вратарей заявил, что если номер игрока делится на 13, то такой игрок приносит неудачу, – всех таких игроков (кто ещё не был выгнан) тоже решили убрать из состава. Сколько же человек осталось в команде после всех этих решений?
3. На доске было записано натуральное число. Его разделили на 7 (с остатком) – получили в частном то же число, что и в остатке. Какое число могло быть

записано на доске? Найдите все возможные варианты и обоснуйте, почему нет других.

4. Пете подарили паззл, состоящий из нескольких кусочков. Он решил его склеить и повесить на стену. За одну минуту он склеивал вместе два кусочка (начальных или ранее склеенных). В результате весь паззл соединился в одну цельную картину за 2 часа. За какое время собралась бы картина, если бы Петя склеивал вместе за минуту не по два, а по три куска?
5. В таблице 2×2 записаны числа. За один ход разрешается добавить по 1 к числам в одной строке или в одном столбце. Можно ли за несколько ходов сделать все числа равными? На этот вопрос нужно ответить для трёх случаев первоначальной расстановки чисел:

а)

| | |
|---|---|
| 2 | 1 |
| 4 | 3 |

б)

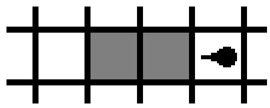
| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 4 | 8 |

в)

| | |
|---|---|
| 1 | 2 |
| 2 | 5 |

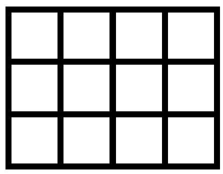
Не забудьте обосновать свой ответ (для каждого из случаев в отдельности).

6. Коля придумал новую шахматную фигуру – *рядового*. Эту фигуру можно поставить на какую-нибудь клетку доски, направить в какую-то сторону (вверх, вниз, вправо или влево) – и рядовой в этом направлении бьёт две ближайшие клетки. (На рисунке показано, как поставленный на доску и направленный влево рядовой бьёт две клетки доски).



а) Можно ли на клетчатую доску 3×4 поставить 6 рядовых так, чтобы никто из них не бил клетку, на которой стоит другой рядовой?

б) Можно ли на клетчатую доску 3×4 поставить 8 рядовых так, чтобы никто из них не бил клетку, на которой стоит другой рядовой?



в) Какое наибольшее количество рядовых можно поставить на клетчатую доску 3×4, чтобы никто из них не бил клетку, на которой стоит другой рядовой? Покажите, как следует расставить рядовых, и обоснуйте, почему нельзя поставить большее количество.

## Задания (третий год обучения)

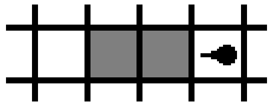
1. По заданию учителя математики Вася решил выписать в тетрадку все двузначные числа, у которых цифра десятков больше цифры единиц. Сколько же чисел он выпишет, если справится с этим заданием?
2. Три землекопа за два часа выкопали три ямы. Сколько ям выкопают шесть землекопов за пять часов?
3. На уроке физкультуры все ученики класса построились в шеренгу. Оказалось, что мальчики и девочки в ней чередуются. Известно, что ровно 52% учеников этого класса – мальчики. Найдите количество девочек в классе.

4. В треугольнике известны длины двух сторон – они равны 3,14 метров и 0,67 метров. Найдите длину третьей стороны, если известно, что она выражается целым числом метров.
5. а) Найдите последнюю цифру числа $2015^{2015} + 2016^{2016}$.

б) Может ли число $2015^n + 2016^n + 2017^n$ оканчиваться на 9 при каком-нибудь натуральном $n$?

в) Может ли число $2016^n + 2017^n + 2018^n$ оканчиваться на 7 при каком-нибудь натуральном $n$?

6. Коля придумал новую шахматную фигуру – *рядового*. Эту фигуру можно поставить на какую-нибудь клетку доски, направить в какую-то сторону (вверх, вниз, вправо или влево) – и рядовой в этом направлении бьёт две ближайшие клетки.



(На рисунке показано, как поставленный на доску и направленный влево рядовой бьёт две клетки доски).

а) Можно ли на клетчатую доску 4×4 поставить 8 рядовых так, чтобы никто из них не бил клетку, на которой стоит другой рядовой?

б) Можно ли на клетчатую доску 4×4 поставить 10 рядовых так, чтобы никто из них не бил клетку, на которой стоит другой рядовой?

в) Какое наибольшее количество рядовых можно поставить на клетчатую доску 4×4, чтобы никто из них не бил клетку, на которой стоит другой рядовой? Покажите, как следует расставить рядовых, и обоснуйте, почему нельзя поставить большее количество.

Приложение 5

## Математические соревнования

Математические соревнования включают в себя индивидуальную или групповую работу над решением интересных нестандартных задач, письменное или устное изложение решения, прямое взаимодействие с другими участниками или членами жюри. Ряд математических соревнований формируют умения поиска ошибок и недочетов в предложенном решении (например, оппонирование на математическом бое), оценку трудности задач (с целью выбора правильной игровой стратегии на математическом аукционе или математическом бое), анализ своих сильных и слабых сторон (например, в ходе математической регаты), отрабатывают навыки письменной и устной монологической речи, а также формируют важные черты математической культуры и прививают навыки ведения научной дискуссии.

Ниже приводятся правила наиболее распространенных личных и командных математических соревнований.

### Письменная личная математическая олимпиада

Каждый участник получает комплект задач (как правило, от 4 до 6), которые решает в течение отведенного времени (3-4 часа; младшим школьникам рекомендуется отводить на решение задач 1,5-2 часа). Решения задач оформляются письменно и предоставляются на проверку членам жюри.

Каждая задача оценивается в 7 баллов. В ходе проверки по каждой задаче соответственно выставляется от 0 до 7 баллов. Допускается и проведение олимпиады, в которой стоимость задач может отличаться. Общий итог подводится суммированием баллов.

### Устная личная математическая олимпиада

Участникам предлагается комплект задач. Все задачи делятся на две группы «выводные » и «довыводные». Участник олимпиады, решивший 3 задачи из первой группы (на их решение отводится 2,5 часа), получает вторую группу задач и еще 1 час дополнительного времени.

Решив задачу (или несколько задач), школьник вызывается отвечать и рассказывает решение одному из членов жюри. Тот ищет ошибки и, если какие-то места в решении требуют более подробного объяснения, задает соответствующие вопросы. Отвечающий может исправлять и дополнять решение "на ходу", но если он не может сделать этого достаточно быстро (например, думает больше минуты), то засчитывается неверный подход. Всего участник может сделать не больше трех подходов по каждой задаче. Если он не смог рассказать решение за три попытки, то он лишается права отвечать эту задачу. При подведении итогов количество неверных подходов не учитывается.

Если принимающий счел решение правильным, то оно засчитывается, а школьник возвращается на место решать другие задачи. Так же каждое решение оценивается баллами (по каждой задаче от 1-го до 7-ми). Если школьник получил неполный балл по данной задаче (такое возможно, даже если решение признано верным) и у него остались подходы, он может исправить допущенные огрехи. "Подозрительные" решения перепроверяются жюри, и бывает (впрочем, не часто), что обнаруживается хитрая ошибка, не найденная во время ответа. Если олимпиада еще не закончилась, то школьнику сообщают об ошибке и предлагают исправить или дополнить решение, а запись о его ответе аннулируется. После конца олимпиады изменения в протоколе уже невозможны, даже если выяснилось, что кто-то рассказал неверное решение.

Допускается использовать следующую систему оценки: решенная задача – 1 балл, нерешенная задача – 0 баллов, при этом номер подхода не учитывается. Также допускается варьировать количество довыводных и выводных задач и количество времени, отводимого на их решение.

При подведении итогов все баллы суммируются.

**Устная командная математическая олимпиада**

На каждую из команд выдается одинаковый комплект задач, которые она решает в течение отведенного промежутка времени (как правило, 3-4 часа).

Решение задачи представляется устно одним из членов команды, причем только одной судейской бригаде. При этом команде желательно иметь с собой необходимые для рассказа решения чертежи и выкладки. На изложение решения каждой задачи дается три попытки. Если все они использованы, а решение задачи не засчитано, то команда не может подходить с решением этой задачи. Каждый член команды может подходить с решениями не более чем двух различных задач. Если решение задачи предоставляется сначала одним игроком, а затем другим, то выходы засчитываются как одному игроку, так и другому. Победитель определяется по количеству решенных задач. В случае равенства количества решенных задач могут учитываться количество подходов и сложность решенных задач.

Приложение 6

# Математические игры

## Математический хоккей

Математический хоккей – это командное соревнования по решению задач. Рисуется игровое поле, визуально напоминающее хоккейную площадку, на котором выделяются ключевые точки: центральное поле (средняя линия, центр поля, зона центрального вбрасывания), зоны соперничающих команд, линии ворот. В начале игры шайба находится в центре поля. Задачи предлагаются по одной. Команда, верно решившая задачу первой, перемещает шайбу в сторону ворот соперников (по отмеченным на поле ключевым точкам). При этом, если шайба уже находится на линии ворот соперников, считается, что команда забила гол, а шайба переносится в центр.

Возможен вариант с разделением игроков соперничающих команд по ролям: игроки двух команд делятся на нападающих, защитников и вратаря. После решения каждой задачи шайба перемещается в сторону ворот проигравшей команды. Если вратарь проигрывает нападающим, то забивается гол, и шайба возвращается в центр поля.

## Математическая карусель

Математическая карусель – это командное соревнования по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков. Задачи решаются на двух рубежах – исходном и зачетном, но очки начисляются только за задачи, решенные на зачетном рубеже. В начале игры все члены команды располагаются на исходном рубеже, причем им присвоены номера от 1 до 6. По сигналу ведущего команды получают задачу и начинают ее решать. Если команда считает, что задача решена, ее представитель, имеющий номер 1, предъявляет решение судье. Если оно верное, игрок №1 переходит на зачетный рубеж и получает задачу там, а члены команды, оставшиеся на исходном рубеже, тоже получают новую задачу. В дальнейшем члены команды, находящиеся на исходном и зачетном рубежах, решают разные задачи независимо друг от друга.

Чтобы понять следующую часть правил, надо представить себе, что на каждом рубеже находящиеся на нем члены команды выстроены в очередь. Перед началом игры на исходном рубеже они идут в ней в порядке номеров. Если члены команды, находящиеся на каком-либо из двух рубежей, считают, что они решили очередную задачу, решение предъявляет судье игрок, стоящий в очереди первым. Если решение правильное, то с исходного рубежа этот игрок переходит на зачетный, а на зачетном возвращается на свое место в очереди. Если решение неправильное, то на исходном рубеже игрок возвращается на свое место в очереди, а с зачетного переходит на исходный. Игрок, перешедший с одного рубежа на другой, становится в конец очереди. И на исходном, и на зачетном рубежах команда может в любой момент отказаться от решения задачи. При этом задача считается нерешенной.

После того, как часть команды, находящаяся на каком-либо из двух рубежей, рассказала решение очередной задачи или отказалась решать ее дальше, она получает новую задачу. Если на рубеже в этот момент нет ни одного участника, задача начинает решаться тогда, когда этот участник там появляется.

За первую верно решенную на зачетном рубеже задачу команда получает 3 балла. Если команда на зачетном рубеже верно решает несколько задач подряд, то за каждую следующую задачу она получает на 1 балл больше, чем за предыдущую. Если же очередная задача решена неверно, то цена следующей задачи зависит от ее цены следующим образом. Если цена неверно решенной задачи была больше 6 баллов, то следующая задача стоит 5 баллов. Если цена неверно решенной задачи была 4, 5 или 6 баллов, то следующая задача стоит на балл меньше. Если же неверно решенная задача стоила 3 балла, то следующая задача тоже стоит 3 балла.

Игра для команды оканчивается, если

а) кончилось время, или

б) кончились задачи на зачетном рубеже, или

в) кончились задачи на исходном рубеже, а на зачетном рубеже нет ни одного игрока.

Время игры, количество исходных и зачетных задач заранее оговаривается.

Игра оканчивается, если она закончилась для всех команд.

## Математическая абака

Математическая абака (математический квадрат) – это командная игра-соревнование по решению задач. Все задачи выдаются для решения всем командам одновременно. Основным зачётным показателем в математической абаке является общее количество набранных очков (включая бонусы). В случае равенства очков у нескольких команд более высокое место занимает команда, имеющая большую сумму бонусов. При равенстве и этого показателя команды считаются разделившими места.

Решение задач. Каждой команде предлагается для решения 6 тем по 6 задач в каждой теме. Задачи каждой темы сдаются по порядку, от 1-й до 6-й (например, у команды не примут ответ на 4-ю задачу, пока она не сдала ответы на задачи 1, 2 и 3). На каждую задачу отводится один подход (одна попытка сдать ответ). Если команда предъявила правильный ответ на задачу, она получает за это цену задачи, а если неправильный или неполный – 0 очков. В некоторых задачах по усмотрению жюри цена задачи может быть поделена поровну между всеми возможными ответами, в этом случае каждый найденный ответ приносит команде соответствующую часть цены. Для каждой такой задачи это указывается в ее условии.

Цена первой задачи каждой темы – 10 очков, второй – 20, …, шестой – 60 очков. (Таким образом, не считая бонусов, команда может заработать за решение задач до 6*210=1260 очков.)

Основные бонусы. Каждая команда дополнительно может заработать бонусные очки:

- За правильное решение всех задач одной темы («бонус-горизонталь») – 50 очков
- За правильное решение задач с одним и тем же номером во всех темах («бонус-вертикаль») – цену задачи с этим номером

Бонусы за первое решение. Первые команды, получившие каждый из шести возможных бонус-горизонталей и каждый из шести бонус-вертикалей, получают их в двойном размере.

Окончание игры. На решение задач отводится 90 минут. Игра для команды оканчивается, если у нее кончились задачи или истекло общее время, отведенное для игры.

**Математическая регата**

В регате участвует некоторое количество команд. В составе каждой команды — 4 человека. Соревнование проводится в четыре тура. Каждый тур представляет собой коллективное письменное решение трех задач. Любая задача оформляется и сдается в жюри на отдельном одинарном листе, причем каждая команда имеет право сдать только по одному варианту решения каждой из задач.

Проведением регаты руководит Координатор. Он организует раздачу заданий и сбор листов с решениями; проводит разбор решений задач и обеспечивает своевременное появление информации об итогах проверки.

Время, отведенное командам для решения, и стоимость задач каждого тура в баллах указаны на листах с условиями задач, которые каждая команда получает непосредственно перед началом каждого тура.

Параллельно с ходом проверки, Координатор осуществляет для учащихся разбор решений задач, после чего обучающиеся получают информацию об итогах проверки. После объявления итогов тура, команды, не согласные с тем, как оценены их решения, имеют право подать заявки на апелляции

Команды-победители и призеры регаты определяются по сумме баллов, набранных каждой командой во всех турах.

**Математический брейн-ринг**

В игре участвуют 4-6 команд по 4-6 человек. Команды рассаживаются в аудитории. Каждая команда выбирает себе капитана. Ведущий оглашает условие задачи, её стоимость в баллах и время на решение этой задачи (время подготовки).

В течение времени подготовки команды пытаются решить задачу. Если в течение времени подготовки капитан какой-то команды поднял руку, то к доске немедленно выходит один их членов данной команды. Если подняли руки несколько капитанов, то к доске выходит член команды, капитан которой поднял руку первым. Спорные ситуации разрешаются жюри.

Вышедший к доске игрок ждет окончания времени подготовки. Он не может общаться с командой до конца рассказа решения. По окончании времени подготовки команды, кроме той, представитель которой находится у доски, сдают в жюри письменные решения задачи. От каждой команды принимается к рассмотрению только одно решение. После сдачи письменных решений игрок, находящийся у доски, рассказывает своё решение задачи. Жюри по ходу рассказа и после него задаёт вопросы и делает замечания.

Письменные решения оцениваются жюри, исходя из объявленной стоимости задачи. При выходе члена команды к доске с команды автоматически снимается стоимость задачи. Рассказанное у доски решение оценивается, исходя из удвоенной стоимости задачи. Оглашается счет по задаче. Если задачи не исчерпаны, описанная выше процедура повторяется.

Итог подводится по суммарному числу набранных баллов.

**Математический аукцион**

Соревнование также известно под названием «математическая драка».

Участие в соревновании индивидуальное. Ведущий предлагает задачи по одной, объявляя ее стоимость в баллах и отводимое для ее решения время. Если в течение отведенного времени один из участников сигнализирует о решении задачи поднятием руки, то решение выслушивается, после чего задача признается либо решенной, либо нерешенной (в том случае, если есть какие-либо недочеты). В том случае, если задача решена, то участник получает заявленное количество баллов, и обсуждение данной задачи прекращается. Если задача не решена, то она остается в розыгрыше (при этом выступившие по данной задаче участники не имеют права предоставлять новое решение).

Если в течение отведенного времени задача не решена ни одним участников, ведущий может поднять стоимость задачи и добавить время на ее решение; эта операция может повторяться для данной задачи неоднократно (при этом ведущий заранее объявляет процедуру увеличения стоимости).
Данная процедура повторяется для каждой из вынесенных на аукцион задач.
Итог подводится по общему количеству набранных каждым участником баллов.

**Математическое домино**

Математическое домино – это командное соревнование по решению задач (допускается также и индивидуальное соревнование, правила которого аналогичны приведенным ниже для команд). Задачи напечатаны на карточках-домино (соответствуют стандартному набору из 28 костяшек). Изначально все карточки лежат на столе жюри задачами вниз, то есть участники могут видеть только изображения костей домино, но не текст задач. Зачётным показателем в математическом домино является общее количество набранных очков.

В начале игры к столу жюри подходят по одному представителю команд и берут по одной задаче (можно предлагать командам записать свой вариант выбора на листке, а если несколько команд захотят взять одну и ту же карточку, то разрешить эту коллизию жребием или как-то иначе).

У команды есть 2 попытки сдать ответ решаемой задачи. Если правильный ответ дан с первой попытки, то команда получает количество баллов, равное сумме очков доминошки, на которой написана задача. Если правильный ответ дан со второй попытки, то команда получает количество баллов, равное большему числу из написанных на доминошке. Если со второй попытки снова дан неправильный ответ, то у команды вычитается количество баллов, равное меньшему числу из написанных на доминошке. После того, как дан правильный ответ или кончились попытки сдать задачу, команда выбирает следующую задачу из имеющихся на столе и нерешенных ею, а уже использованную задачу возвращает в общий набор (то есть, эта задача в дальнейшем может быть выбрана другими командами). Таким образом, в каждый момент времени у команды есть только одна задача.

Особая ситуация с карточкой «Пусто-пусто». На решение этой задачи дается всего одна попытка. Но за правильный ответ дается 10 баллов.

Ответ задачи сдается на отдельном листочке (то есть не пишется на доминошке с условием задачи, так как потом эту доминошку получат другие команды)

Игра заканчивается, когда у команды не осталось задач, которые она еще не решала, или истекло время, отведенное на игру.

## Математические крестики-нолики

Математические крестики-нолики – это командное соревнование по решению задач. Все задачи выдаются в начале игры. Каждая задача привязана к клетке доски 5×5. Например, «Строка 3, задача 5». Зачётным показателем в математических крестиках-ноликах является общее количество набранных очков.

Задачи можно решать в любом порядке. Каждую задачу можно сдавать только один раз. Ответы к задачам сдаются по одному. Если задача решена правильно, то в соответствующую клетку ставится «крестик», если неправильно – «нолик».

За правильно решенную задачу команда получает количество баллов, равное количеству правильно решенных задач, «стоящих» в клетках, соседних по стороне с решенной задачей, плюс один балл (за саму задачу). Если задача решена неправильно, то баллы не увеличиваются и не уменьшаются. Таким образом, правильная задача дает баллы не только своей клетке, но и клеткам, соседним по стороне.

Например, в игре возникла такая ситуация (x – правильно решенная задача, 0 – не правильно):

| | | |
|---|---|---|
| **x** | **0** | **x** |
| | | **x** |
| | **x** | |

Если решить правильно центральную задачу, то за нее команда получит 3 балла. А также баллы за задачи «Строка 2, задача 3» и «Строка 3, задача 2» увеличатся на 1.

Игра заканчивается, когда у команды не осталось задач, которые она еще не решала, или истекло время, отведенное на игру.

## Математический лабиринт

Лабиринт – это командная игра-соревнование по решению задач. Основным зачётным показателем в лабиринте является общее количество набранных очков.

Решение задач. В начале игры каждая команда получает первую из 30 пронумерованных задач, расположенных в виде прямоугольника 5×6. По каждой задаче есть одна попытка сдать ответ. Вне зависимости от правильности полученного ответа, команда получает следующую по номеру задачу (если эта задача не была уже выдана).

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| 1 | 2 | 3 | 4 | 5 | 6 |
| 12 | 11 | 10 | 9 | 8 | 7 |
| 13 | 14 | 15 | 16 | 17 | 18 |
| 24 | 23 | 22 | 21 | 20 | 19 |
| 25 | 26 | 27 | 28 | 29 | 30 |

Если команда предъявила правильный ответ на задачу, она получает за это цену задачи, а если неправильный или неполный – 0 очков. Все задачи верхнего ряда стоят по 3 очка, задачи каждого следующего ряда стоят на 1 больше предыдущего.

В лабиринте есть 4 особые клетки.

| | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|
| | | 3 | | | |
| | | | 9 | | |
| | | 15 | | | |
| | | | 21 | | |
| | | | | | |

При их правильном решении, команда, кроме следующей задачи, получает задачу, находящуюся на одну клетку ниже (если соответствующие задачи еще не выданы).

Игра для команды оканчивается, если у нее кончились задачи или истекло общее время, отведенное для игры.

## Математические шахматы

Математические шахматы – это командное соревнование по решению задач. Побеждает в нем команда, набравшая наибольшее число очков.

Задач всего 32: 16 «клеточных» задач и 16 «фигурных».

В начале игры командам раздаются все «клеточные» задачи и «пешка 1» и «пешка 2». После сдачи ответа к фигурной задаче, команда может взять еще одну «фигурную» задачу на свой выбор. Таким образом, у каждой команды в каждый момент времени на руках находятся ровно две «фигурные» задачи.

В процессе игры каждая команда должна сдавать по две задачи одновременно: одна задача «клеточная» и одна «фигурная». Если на обе задачи дан правильный ответ, то команда получает произведение стоимости «клеточной» и «фигурной» задач; если только на одну дан правильный ответ, то получает баллы только за эту задачу; если же оба ответа не верны, то получает ноль баллов.

Стоимость «фигурных» задач фиксирована на всю игру («пешки» стоят по 2 балла (их 8 штук), «кони» (2 штуки) и «слоны» (2 штуки) по 3 балла, «ладьи» (2 штуки) по 5 баллов, «ферзь» (1 штука) 9 баллов, «король» уникальная задача со стоимостью 20 баллов). Стоимость «клеточных» задач меняется в процессе игры. В начале игры каждая «клеточная» задача стоит 5 баллов. Если какую-нибудь задачу решили 1 или 2 команды то стоимость этой задачи 5 баллов; если 3 или 4 команды, то 4 балла; если 5,6,7 или 8 команд до 3 балла; если больше 8 команд, то стоимость 2 балла (если цена задачи упала, то она упала для всех команд(!), и для тех, кто еще не сдал, и для тех, кто уже сдал эту задачу. То есть при правильной сдаче «клеточной» задачи вы не только повышаете свои баллы, но и понижаете баллы, противников, которые уже решили эту задачу). Если команды сдает «короля» (конечно же, с какой-нибудь «клеточной» фигурой), то за обе правильные задачи команда получает 20 баллов (в не зависимости от стоимости «клеточной» задачи); если же хотя бы одна задача не верна, то команда получает 0 баллов.

Игра заканчивается через определенное время, сообщенное до начала соревнования. Также игра заканчивается для команды, в случае если ею были решены все задачи.